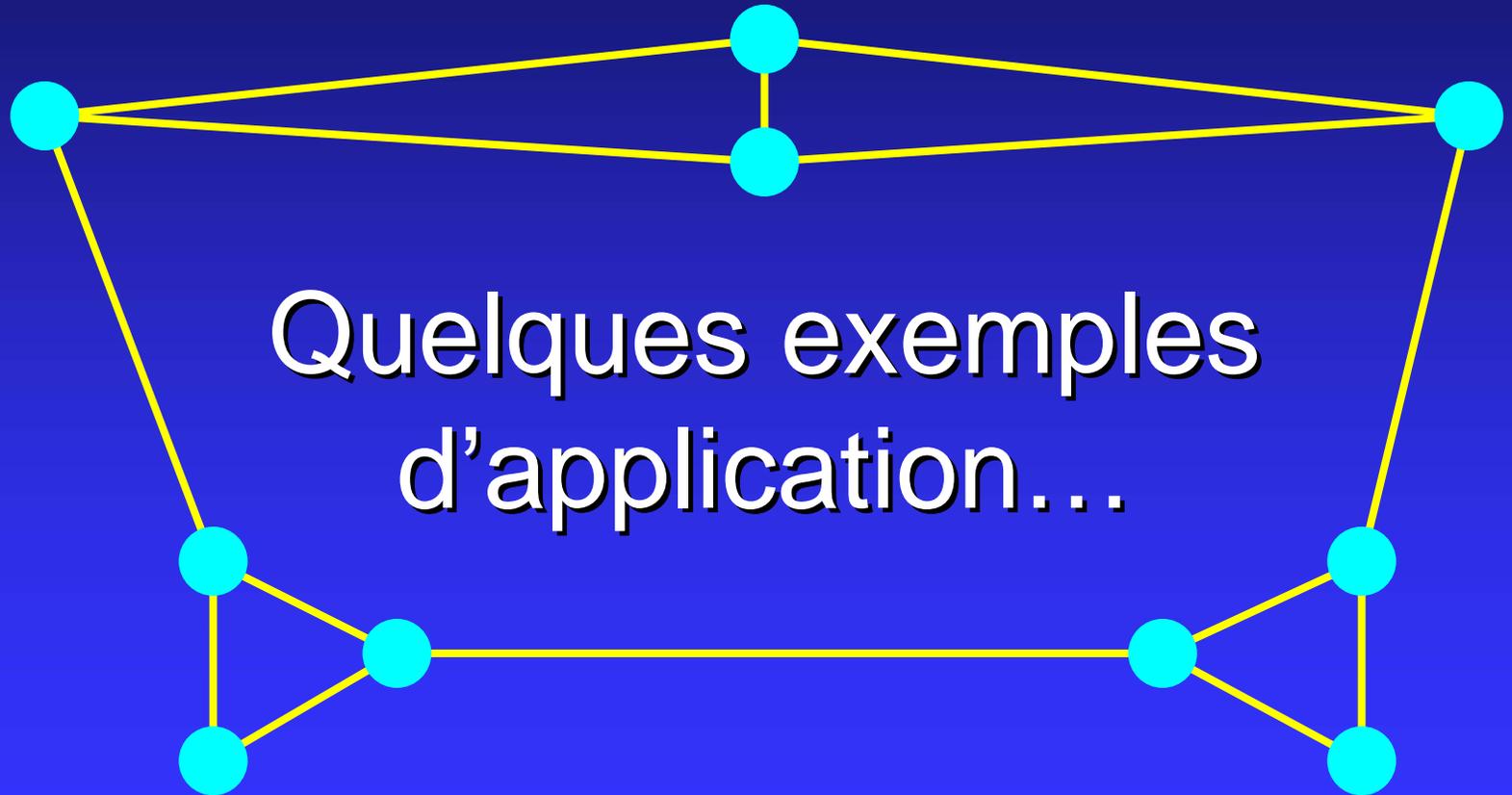


# Théorie des graphes



# Plan de la présentation

- Introduction

*rappel de quelques définitions de base, bref historique, un premier exemple...*

- Quelques exemples d'application

*Chimie, sociologie, bio-informatique, recherche opérationnelle, réseaux de communication, fonctionnement de systèmes, etc.*

**Présentation consultable :**

<http://www.ac-bordeaux.fr/>

[Pedagogie/Maths/peda/lyc/graphes.htm](http://www.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/peda/lyc/graphes.htm)

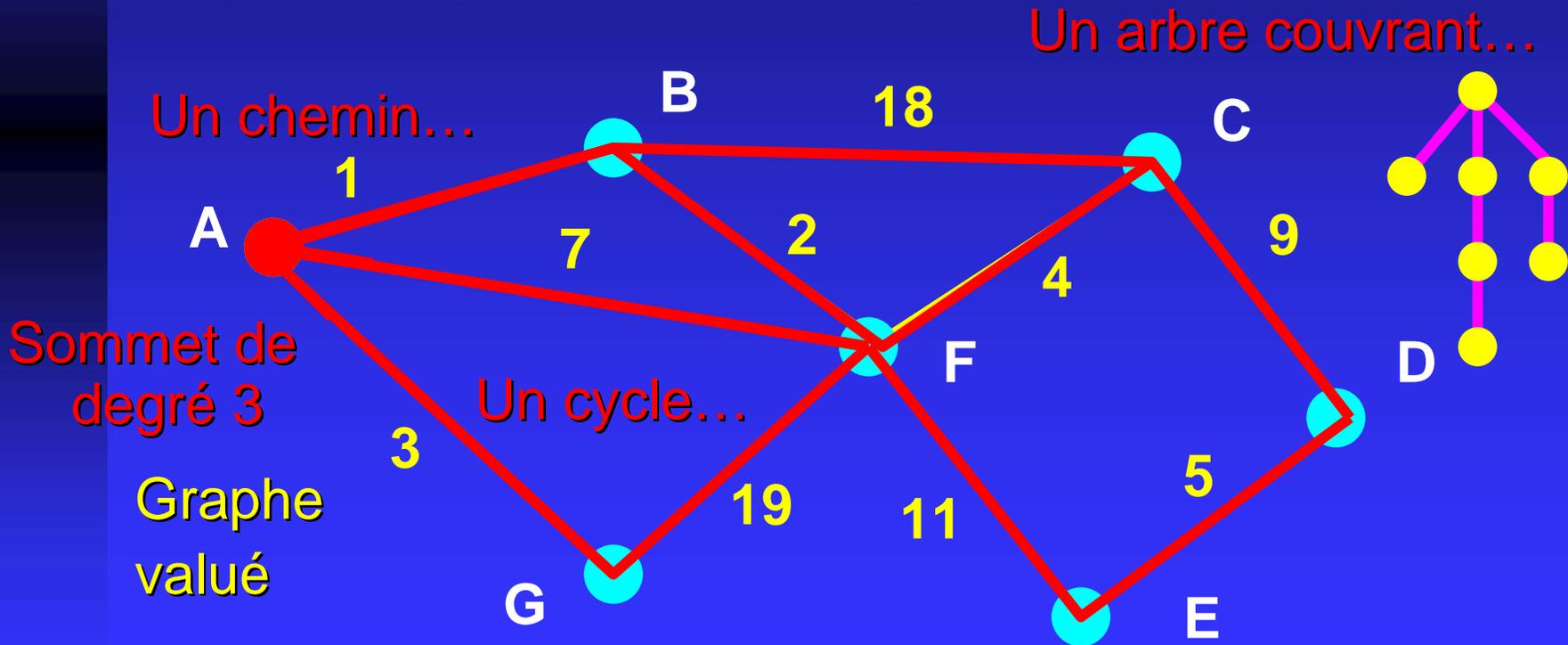
Merci de votre  
attention...

[sopena@labri.fr](mailto:sopena@labri.fr)

# Notions élémentaires...

## Graphes non orientés

- Un ensemble de sommets
- Un ensemble d'arêtes

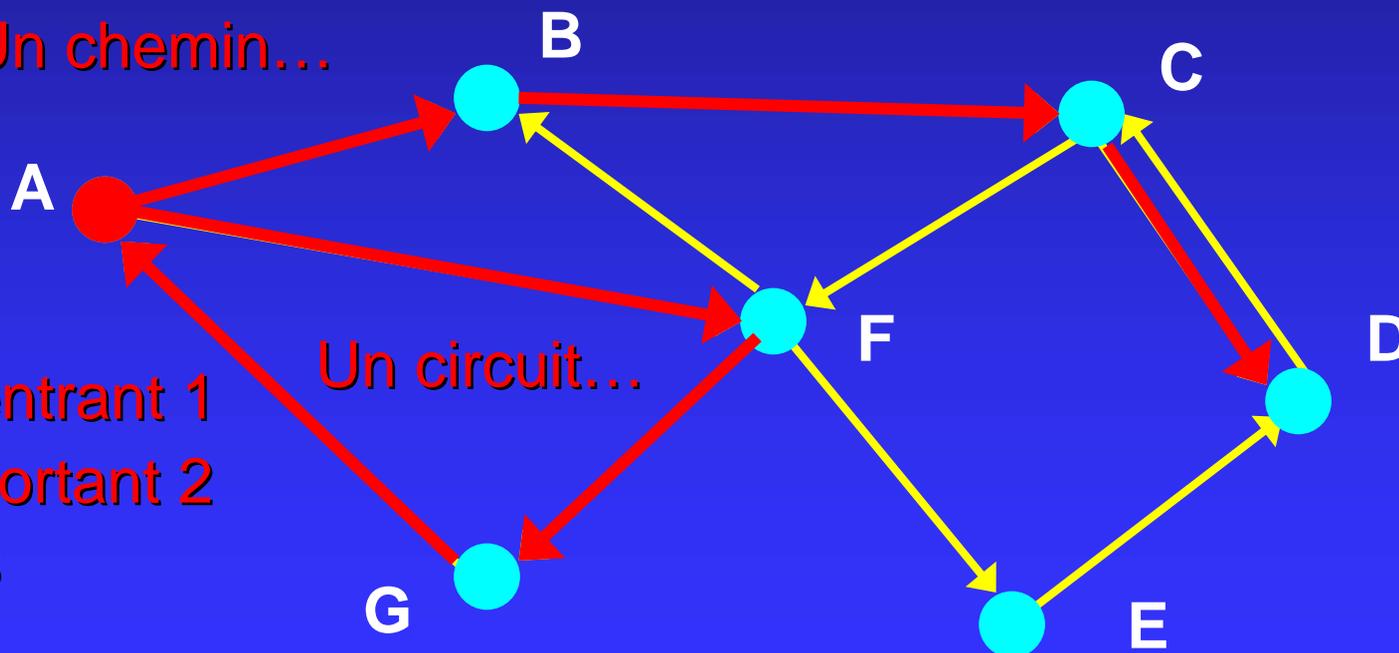


# Notions élémentaires...

## Graphes orientés

- Un ensemble de sommets
- Un ensemble d'arcs

Un chemin...

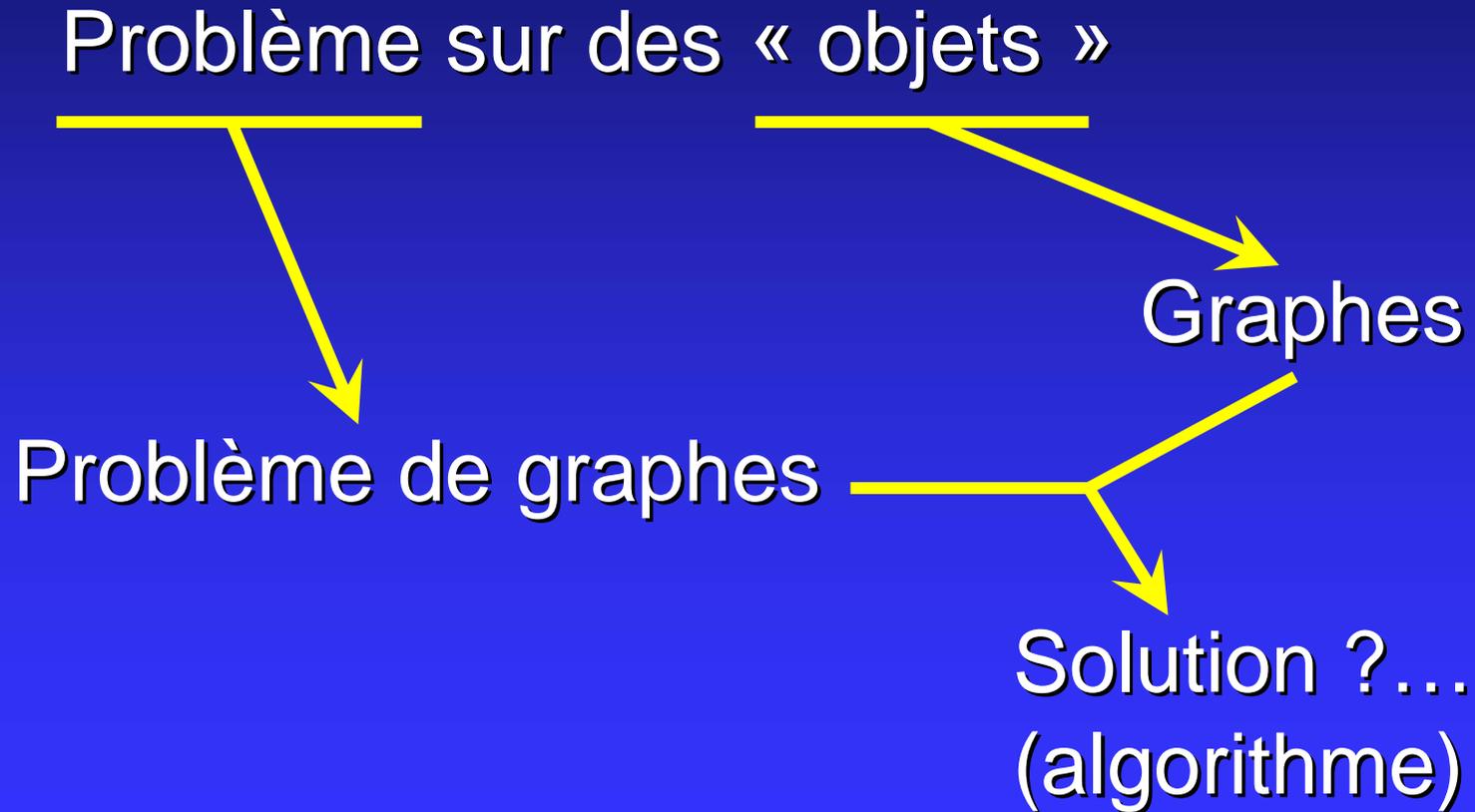


Degré entrant 1  
Degré sortant 2  
Degré 3

## Bref historique...

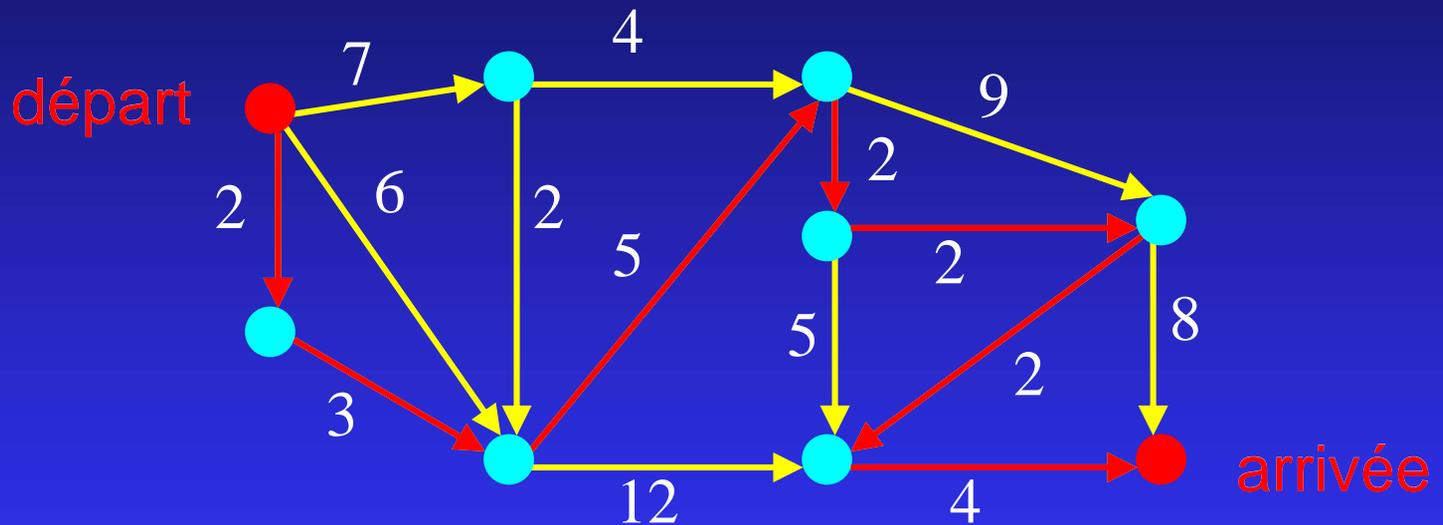
- 1736, Euler : les ponts de Königsberg  
*... récréations mathématiques ...*  
*... chimie, électricité ...*
- 1852, De Morgan (Guthrie) : quatre couleurs
- 1946, Kuhn, Ford et Fulkerson, Roy, etc.  
*... recherche opérationnelle ...*
- Depuis 1960, applications... (informatique)

# Un outil pour la modélisation (et la résolution !...) de problèmes



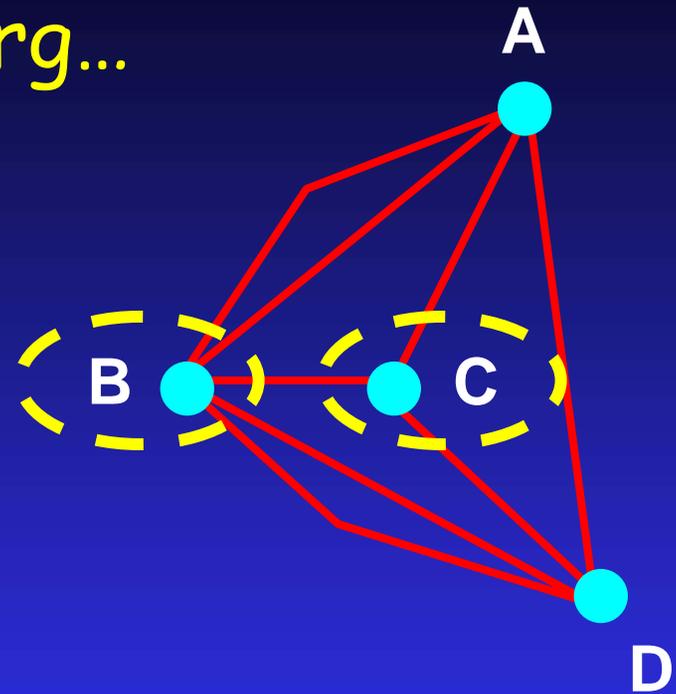
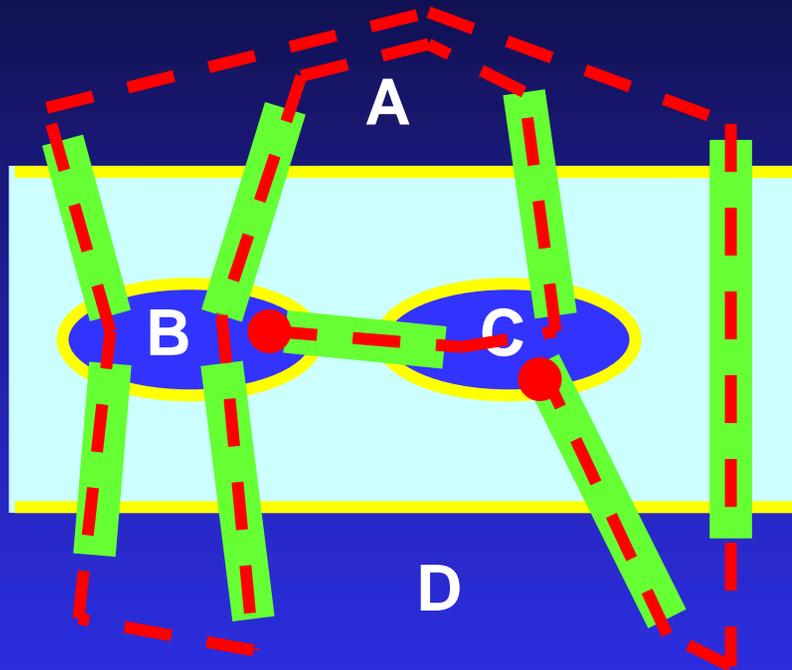
# Exemple : meilleur trajet...

Objet : plan de ville, durée de trajet pour chaque tronçon



- Problème de plus court chemin dans un graphe valué (algorithmes connus...)
- Version « dynamique » (évolution de la valuation)

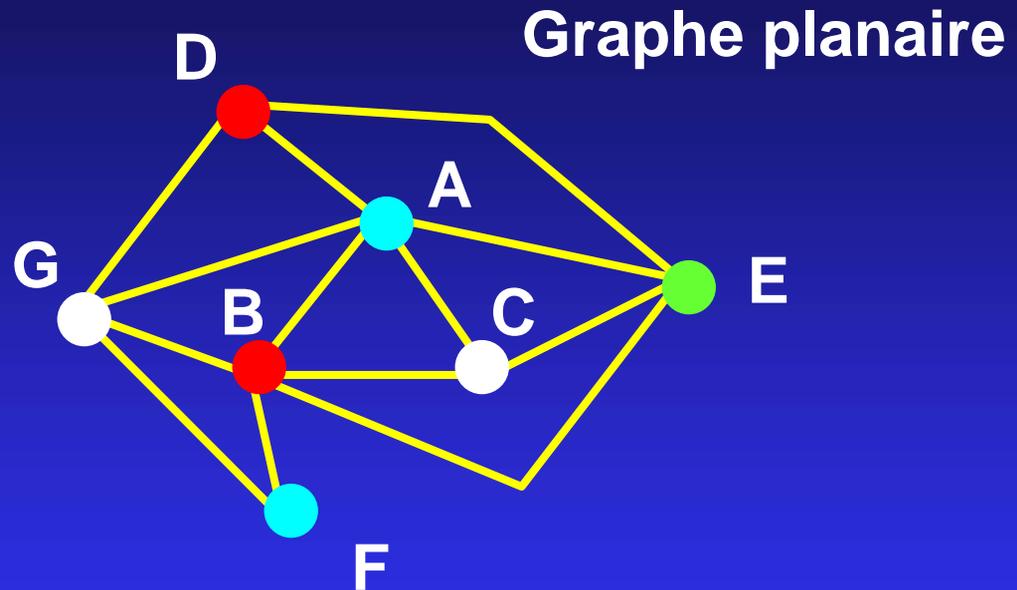
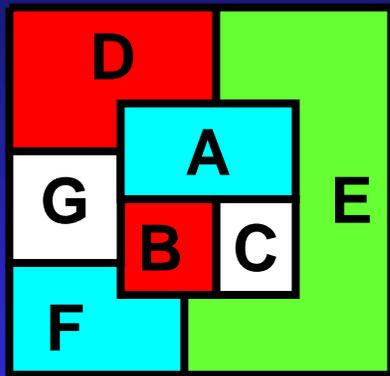
# Les ponts de Königsberg...



*Il existe un cycle « eulérien » si et seulement si tous les sommets sont de degré pair...*

*Il existe un chemin « eulérien » si et seulement si 0 ou 2 sommets sont de degré impair...*

# Le problème des quatre couleurs...



*Tout graphe planaire est coloriable en utilisant quatre couleurs au plus... [Appel & Haken, 1977]*

# Quelques domaines d'application...

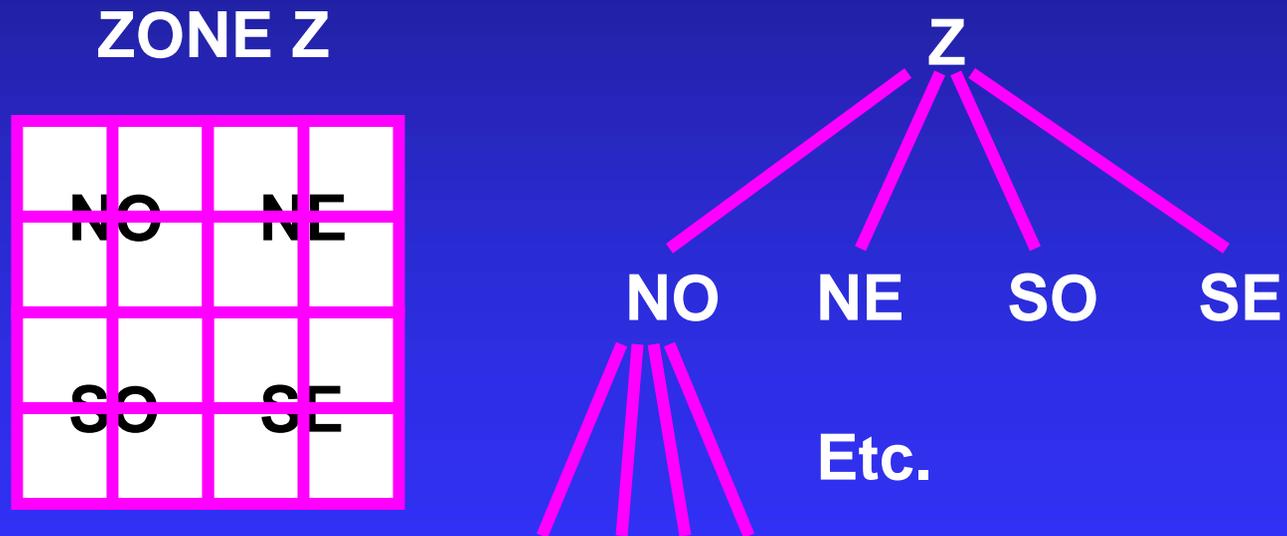
- Chimie
- Sociologie
- Bio-informatique
- Recherche opérationnelle
- Réseaux de communication
- Fonctionnement de systèmes

# Autres domaines d'application...

- Géographie (cartographie), architecture (plans), linguistique (sémantique), etc.
- Le WEB (graphe des liens, calcul de pertinence dans les moteurs de recherche, etc.)
- Graphes « petits mondes » (Kevin Bacon)
- Les réseaux optiques (producteurs-consommateurs, bande passante, etc.)
- Bases de données (dépendances)
- Bases de connaissances
- Techniques de compilation
- Imagerie numérique (scènes, compression)
- Grammaires de graphes (aspects dynamiques)
- Etc.

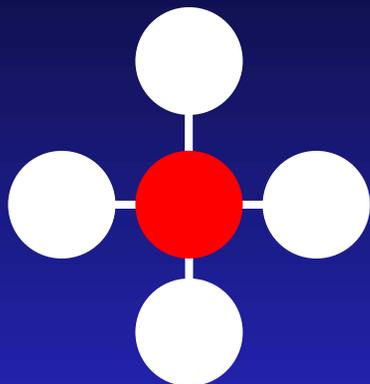
# Compression d'images : les quadrees

Codage d'une image par un arbre...

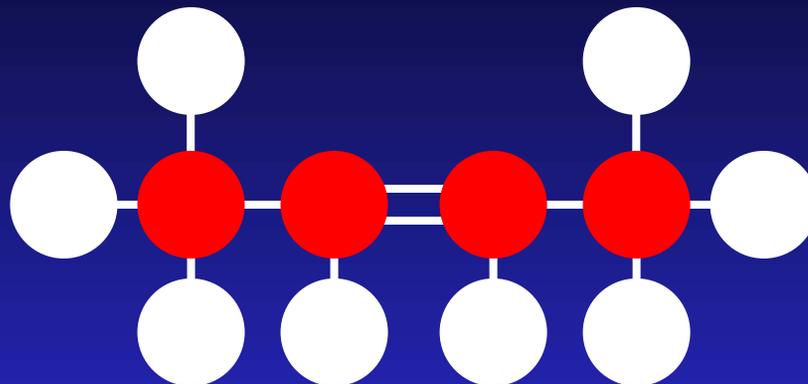


*Feuilles = pixels ou « zones uniformes »*

# Modélisation de molécules



méthane  $\text{CH}_4$



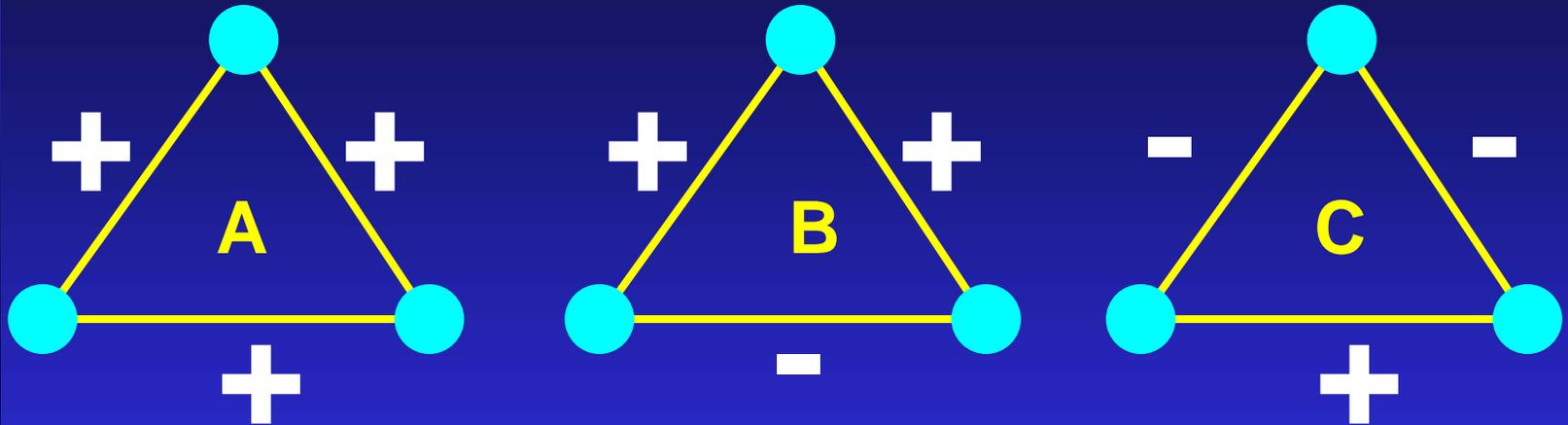
butène  $\text{C}_4\text{H}_8$

Graphes (multigraphes) avec contraintes sur les degrés des sommets selon le type de sommet...

## Cayley [1875]

- *Hydrocarbures saturés  $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$  : arbres...*
- *Énumération de molécules, d'isomères, classifications, etc.*

# Graphes signés (sociogrammes)

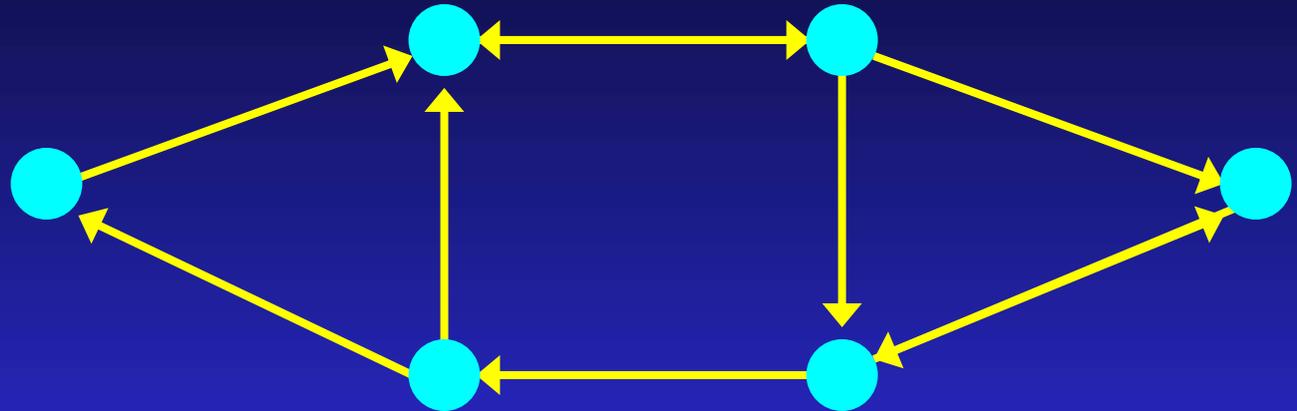


Relation aimer / détester entre employés...

Configurations équilibrées (A,B) ou non (C)

*Notions de « clans » (employés, nations, politiciens, etc.), algorithmes de découpage*

# Pouvoir et influence



Chaque individu a une opinion représentée par un nombre réel (e.g. valeur d'un objet)...

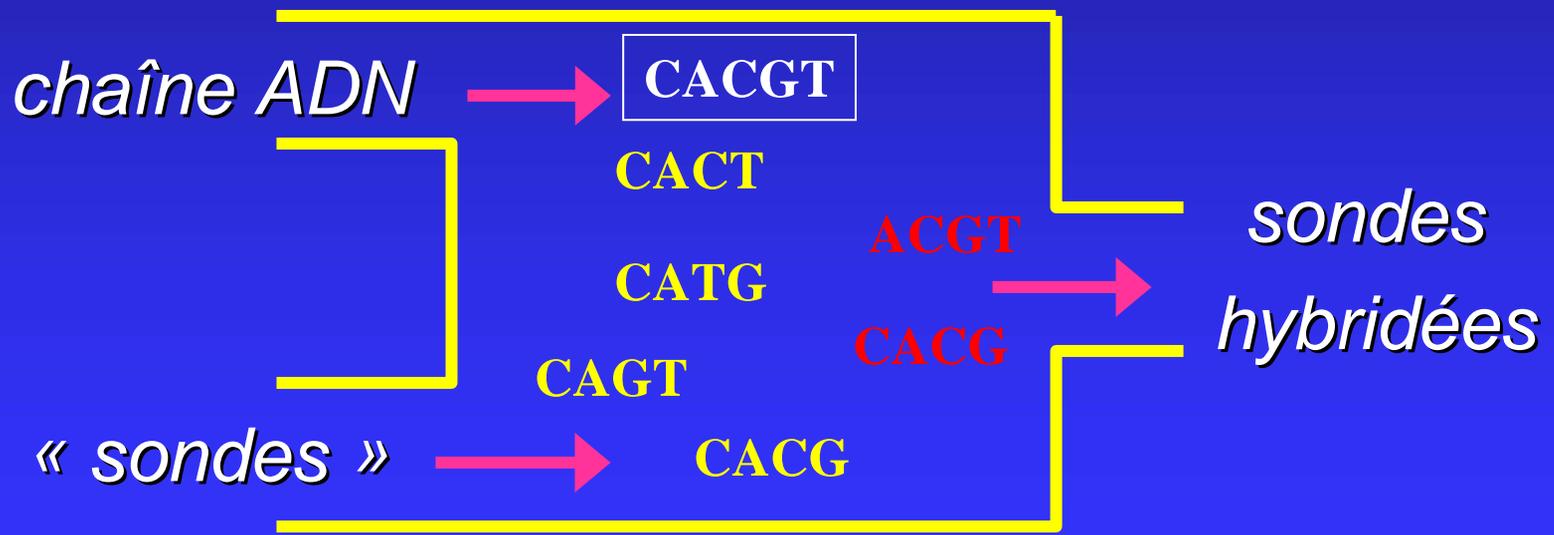
Ces opinions évoluent dans le temps, en fonction des opinions des personnes ayant de l'influence sur l'individu...

- L'opinion de l'individu UNTEL se stabilise-t-elle ?
- Si oui, tend-on vers un consensus ? Vers plusieurs ?
- Qui a réellement de l'influence sur ces consensus ?

# Décodage de chaînes d'ADN

Chaîne d'ADN = séquence de nucléotides  
A,C,G,T : Adénine, Cytosine, Guanine, Thymine

## Séquençage par « hybridation »

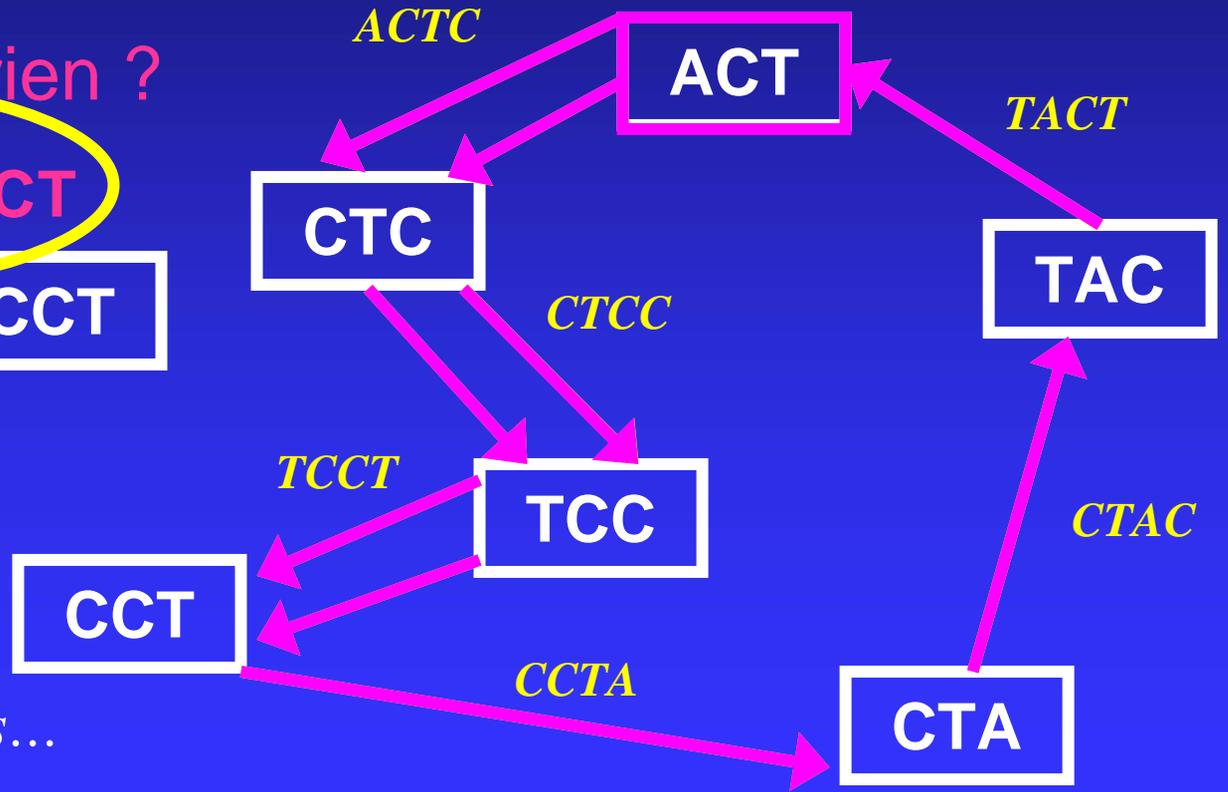
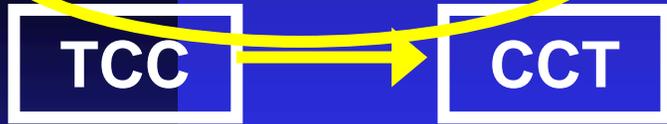


# Décodage de chaînes d'ADN

Sondes hybridées : TCCT, ACTC, CTAC, TCCT, ACTC, CTCC, TACT, CCTA, CTCC

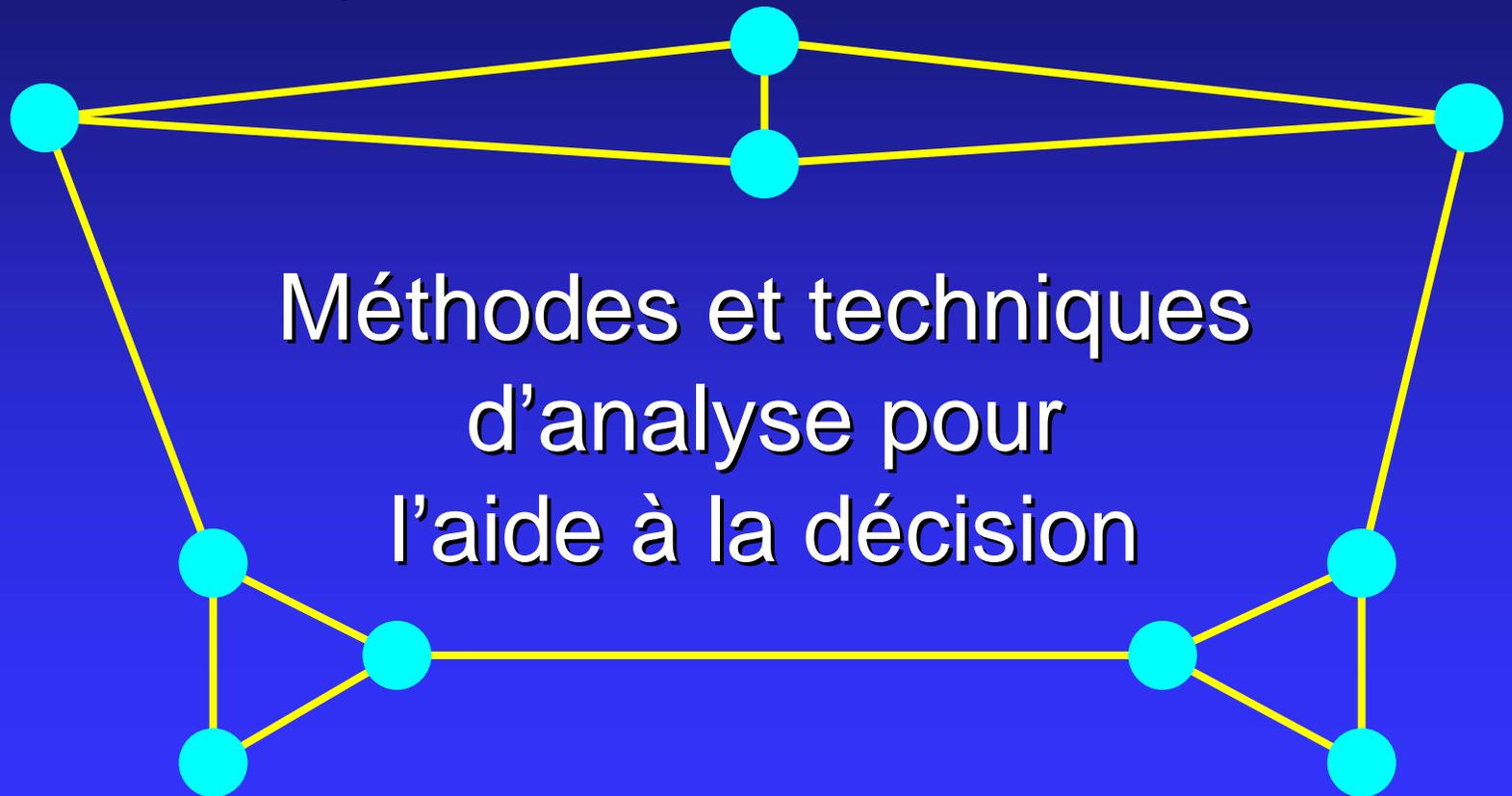
Chemin eulérien ?

TCCT  
ACTCCTACTCCT



Problème :  
en général,  
plusieurs  
solutions possibles...

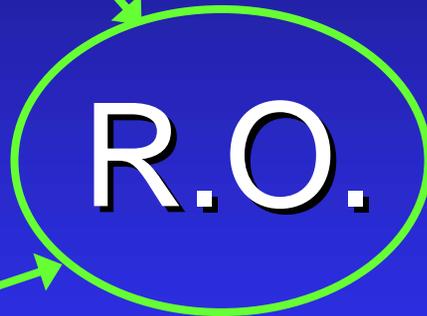
# Recherche opérationnelle



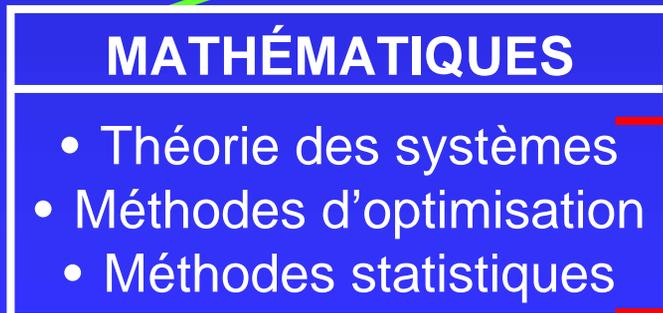
# Recherche opérationnelle



Élaboration  
du modèle



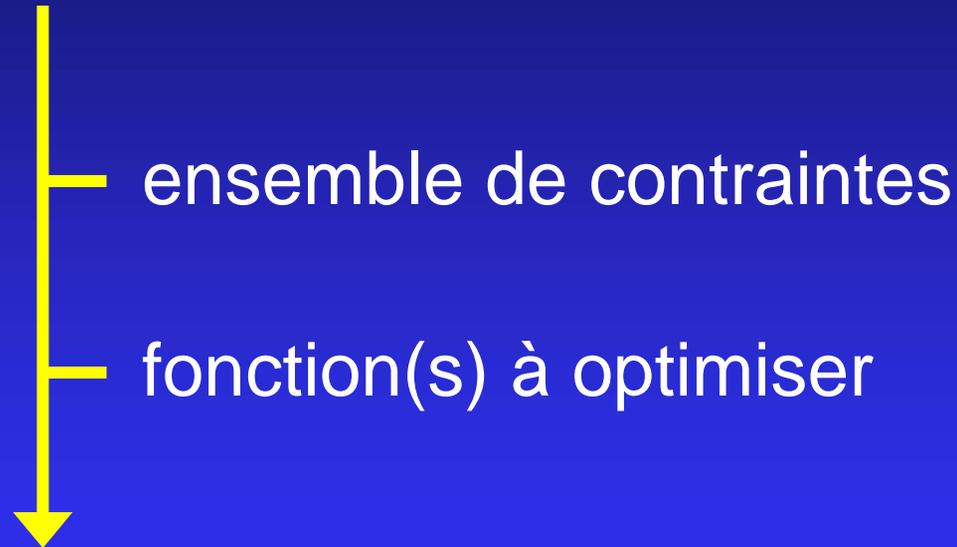
Traitement  
du modèle



Théorie des  
graphes

# Problèmes de recherche opérationnelle

n valeurs à déterminer



solution dans un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$

# Quelques exemples de problèmes...

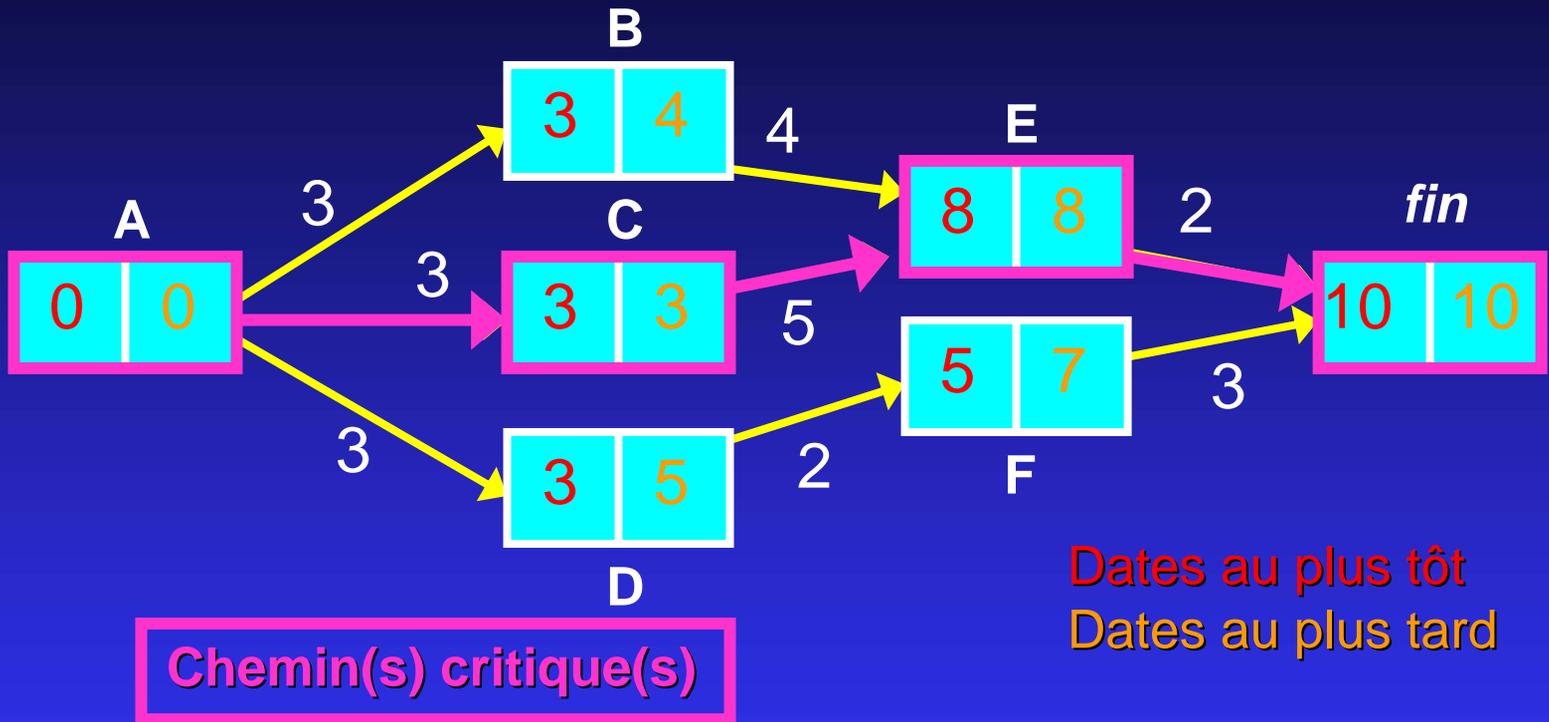
- Problèmes d'ordonnancement
- Problèmes de flot maximal
- Problèmes d'affectation
- Programmes de transport  
dépôts de marchandises, clients avec besoins, capacité des canaux illimitée (transformations d'arbres...)
- Problème du voyageur de commerce  
visite de villes, avec retour... (chemin hamiltonien de coût minimal)
- Problème du « sac à dos »  
 $n$  objets, chaque objet ayant une « utilité », sac de capacité  $m$ ...
- Etc.

## En pratique...

- Logiciels d'aide à la décision  
(boîte à outils de résolution...)
  1. Modéliser les données du problème
  2. Définir les contraintes
  3. Définir la fonction à optimiser
  4. Utiliser les outils de résolution
  5. Décider !...

*Économie, commerce, production, transport, etc.*

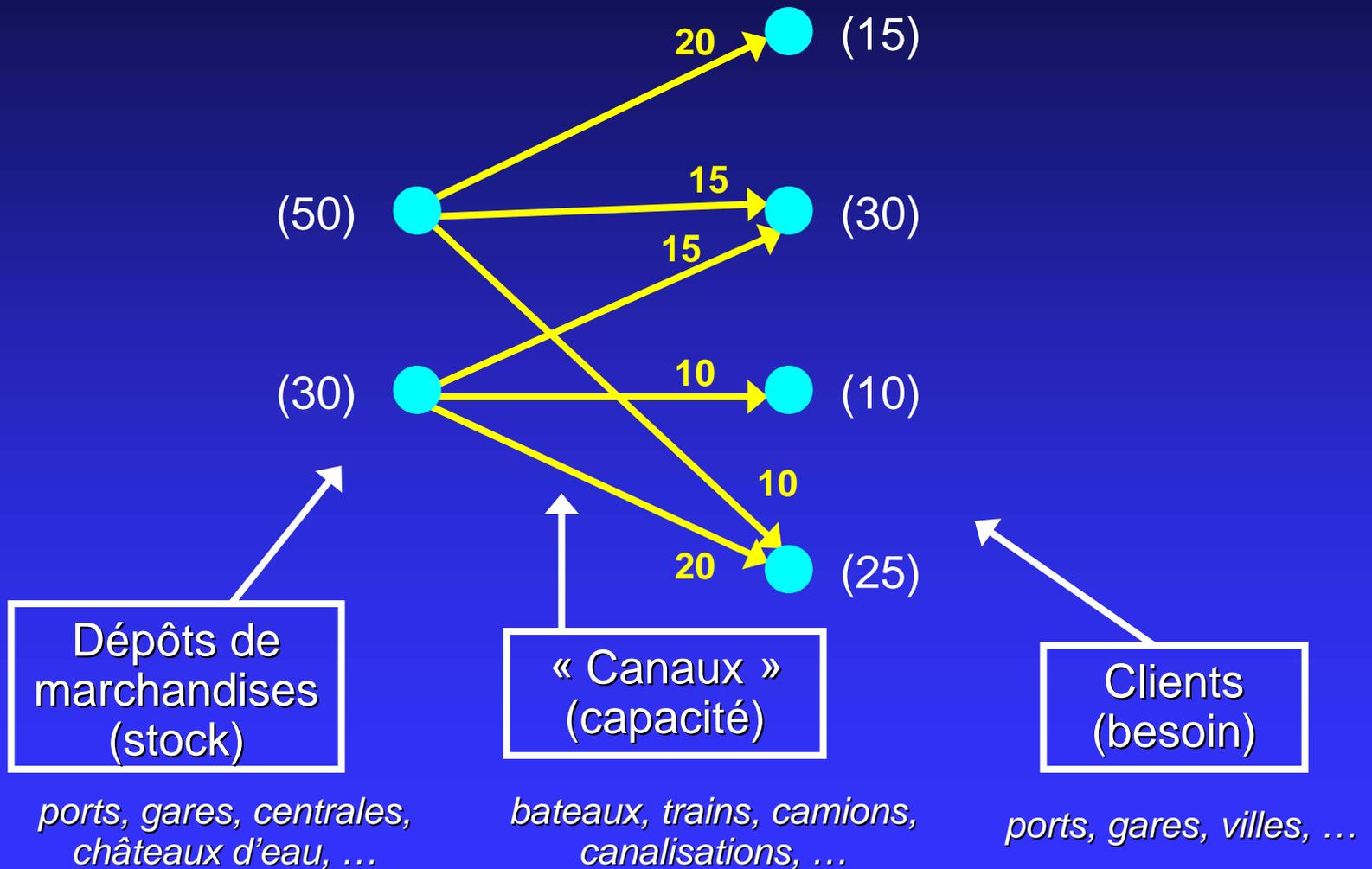
# Problèmes d'ordonnancement



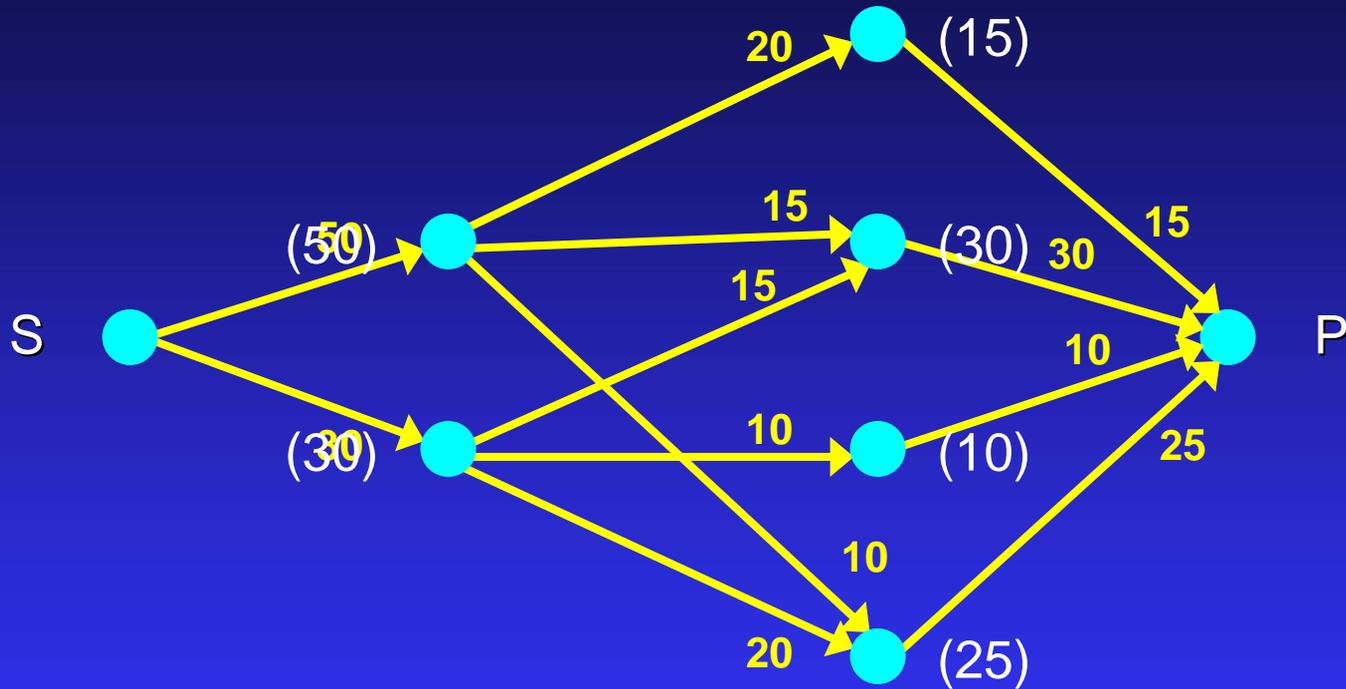
Sommets = tâches à réaliser

Arcs = relation d'antériorité (valuation : durée de la tâche initiale)

# Réseaux de transport



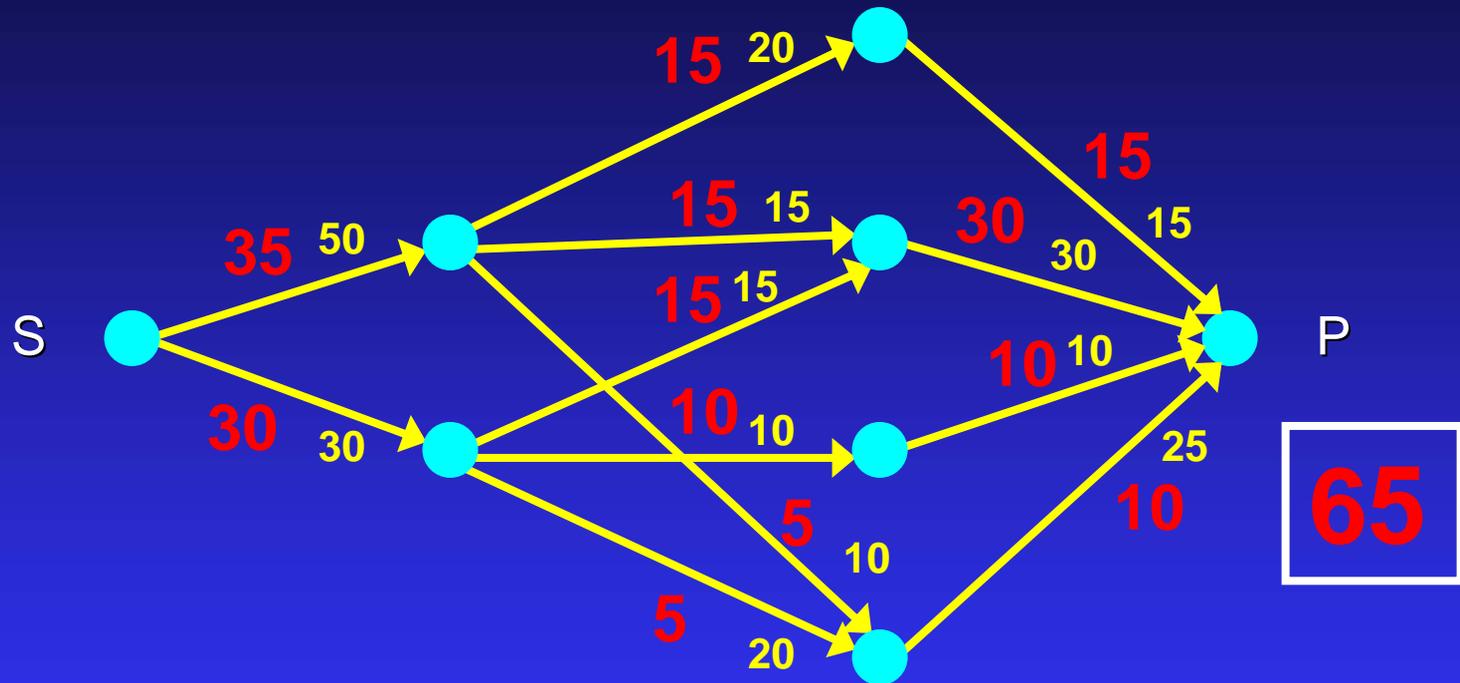
# Réseaux de transport



Réseau de transport :

- Un sommet source (S), un sommet puits (P),
- Pour tout sommet  $u$ , il existe un chemin de S vers  $u$  et un chemin de  $u$  vers P

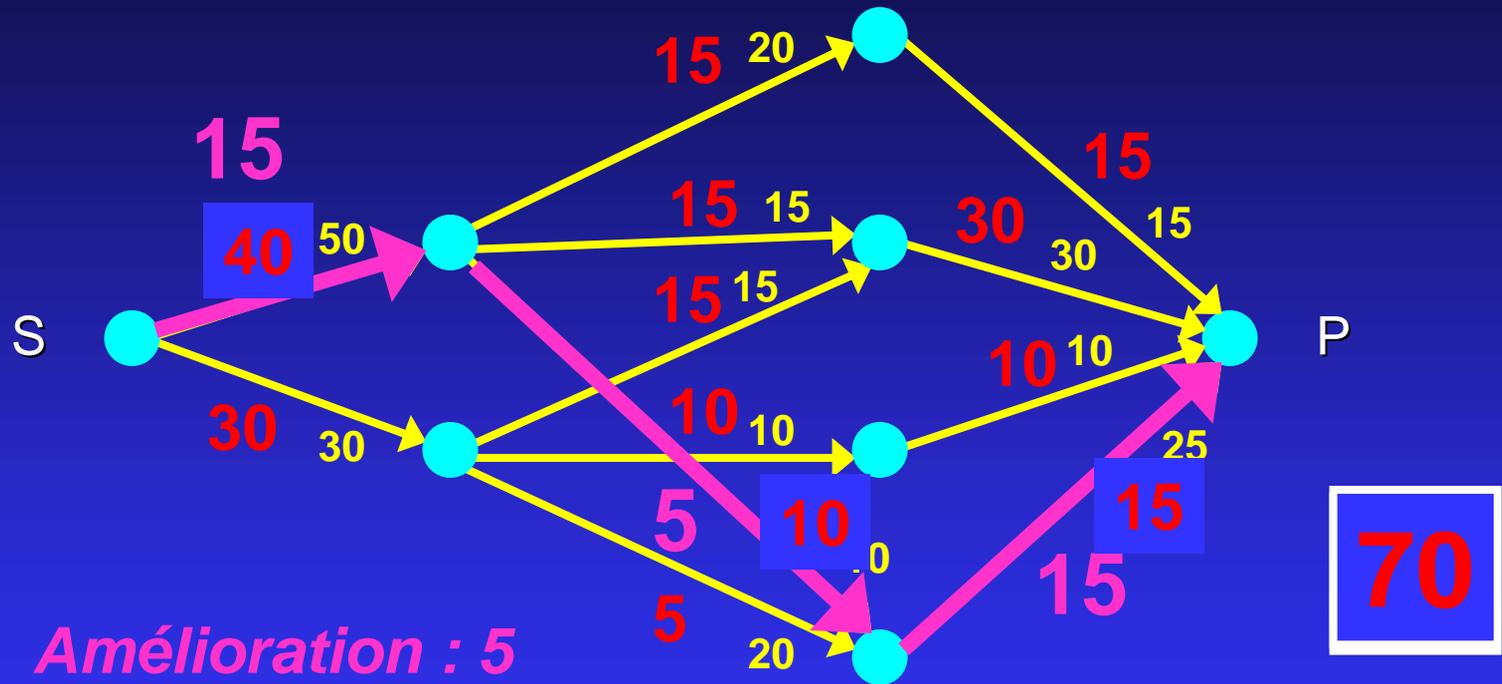
# Flot dans un réseau de transport



Flot :

- Pour chaque arc : *valeur*  $\leq$  *capacité*
- Pour tout sommet (sauf S et P) :  
*somme des valeurs entrantes* = *somme des valeurs sortantes*

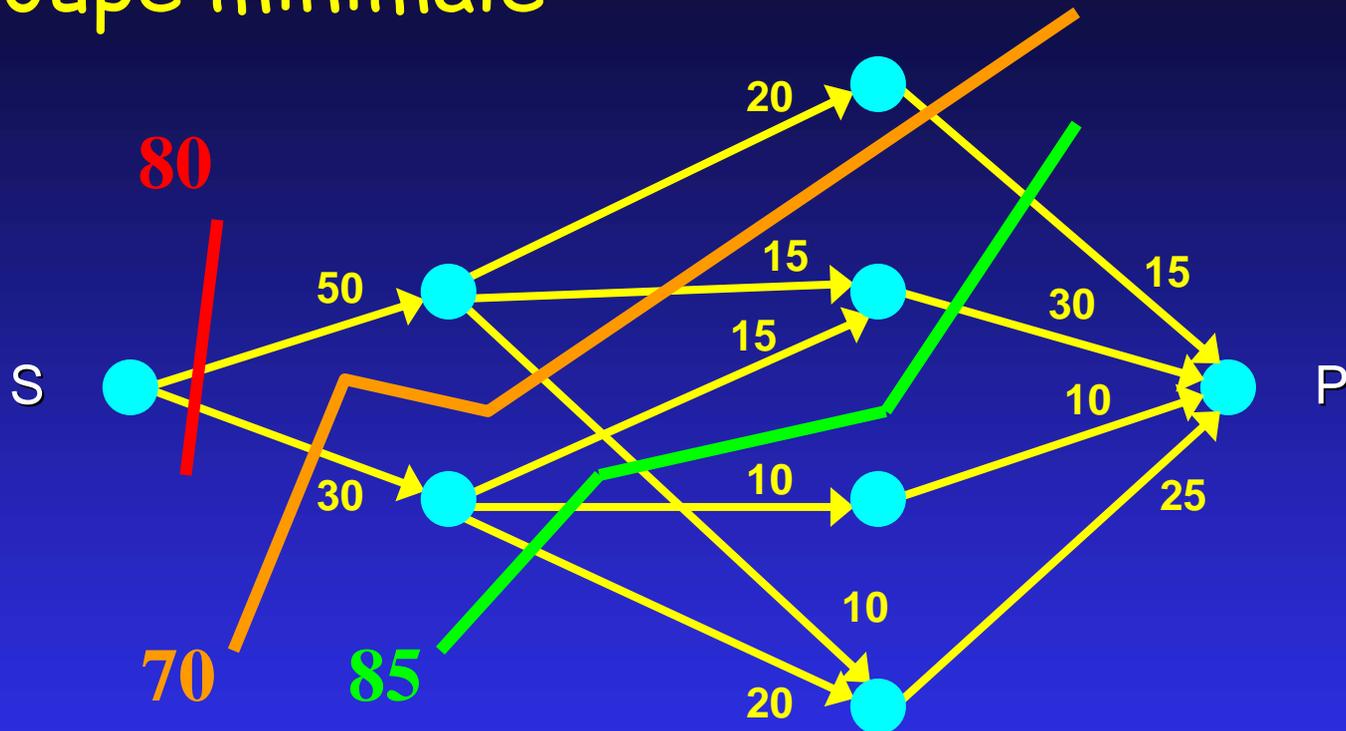
# Flot maximal dans un réseau de transport



Flot maximal : pas de « chaîne améliorante »

- Souvent des chaînes « plus complexes », avec retours arrière,
- Possibilité de « coût de transport » sur les arcs...

# Coupe minimale



- Une coupe = ensemble d'arcs dont la suppression « sépare » les sommets S et P
- Coupe minimale = coupe dont le poids (somme des poids des arcs la composant) est minimal

Th : Poids d'une coupe minimale = valeur d'un flot maximal

# Problèmes d'affectation

Exemple : affectation de 5 postes (a,b,...) à 5 personnes (A,B,...)

Matrice des « préférences »

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

Problème

réaliser l'affectation  
en minimisant les  
insatisfactions

*Affectation de personnes sur  
des machines-outils, de  
commandes sur des sites de  
production, etc.*

# Problèmes d'affectation

Matrice des « préférences »

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5

etc.

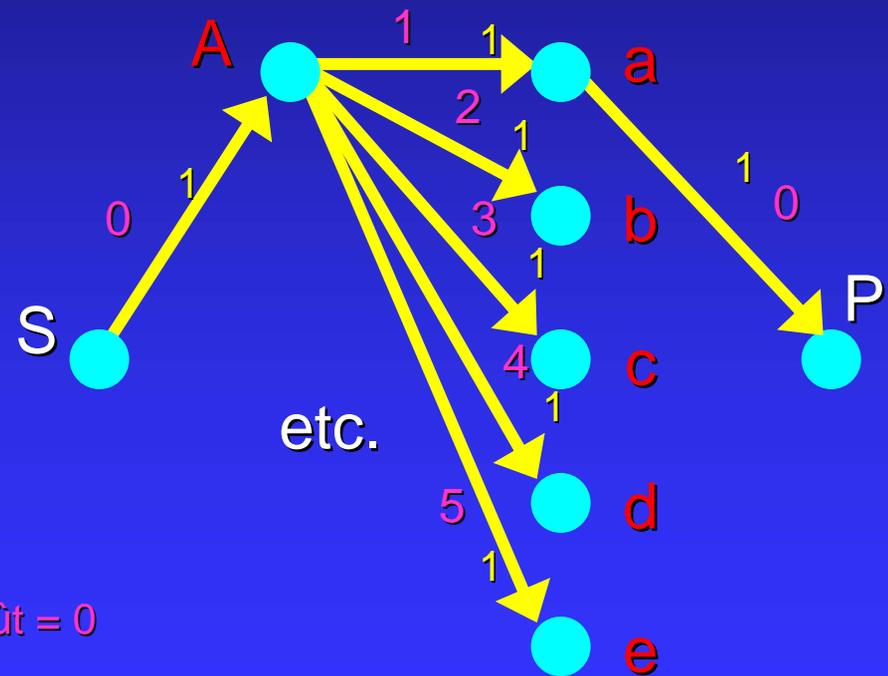
**Capacités : 1 partout...**

Chaque personne se verra affectée à un poste, chaque poste à une personne

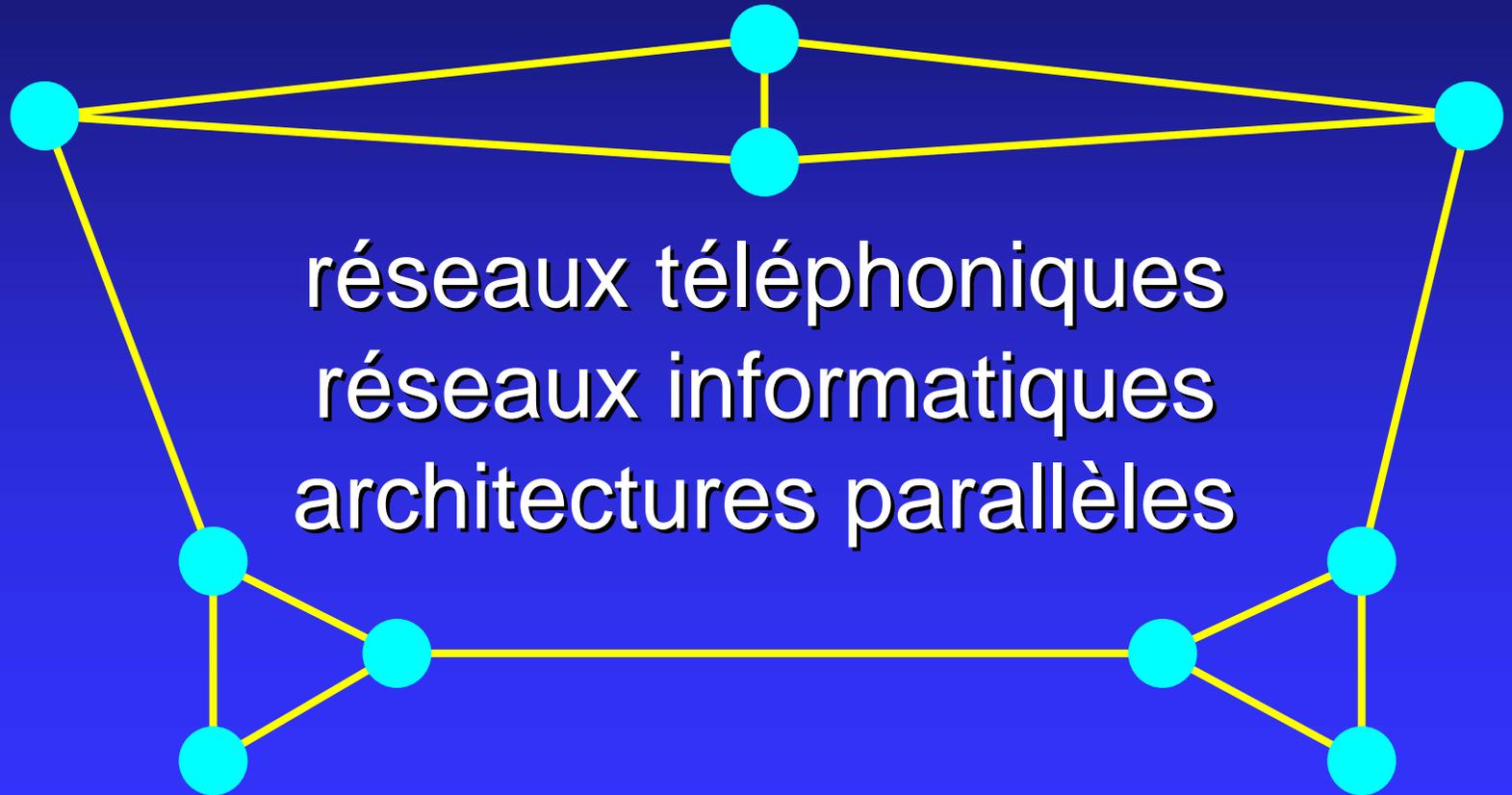
**Coût unitaire : matrice...**

Sauf sortant de S ou entrant en P : coût = 0

Problème de flot maximal de coût minimal...

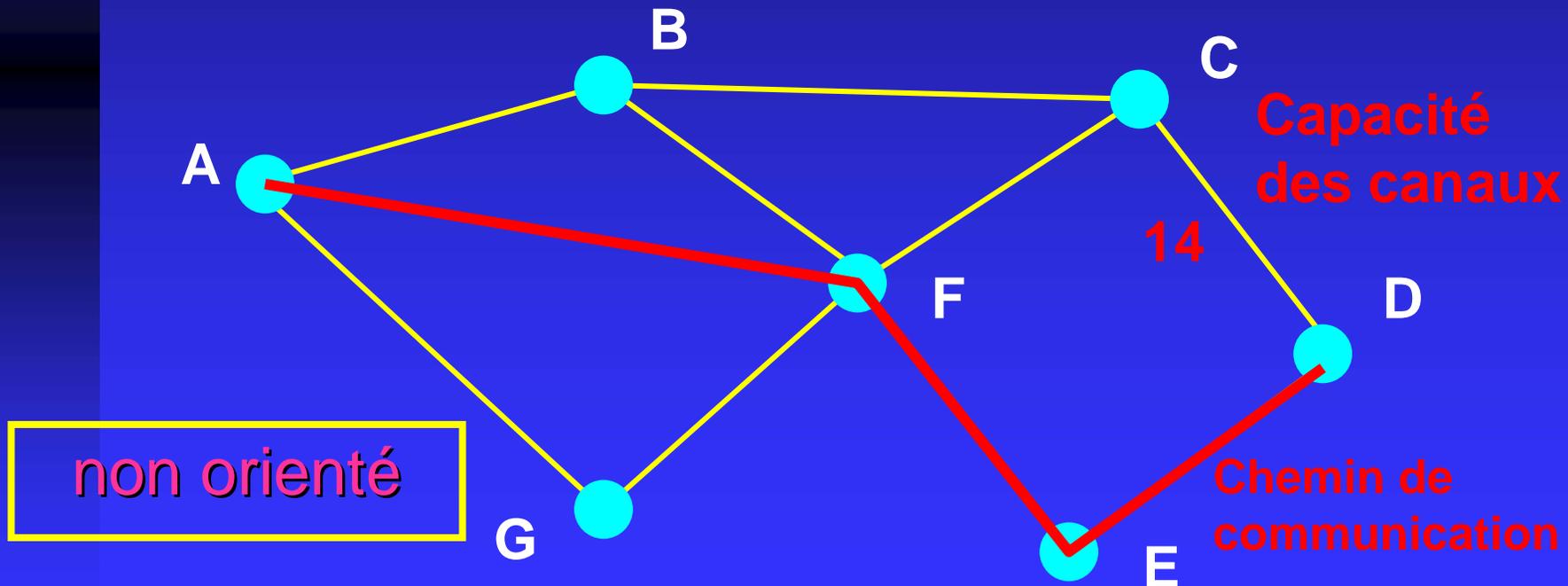


# Les réseaux de communication



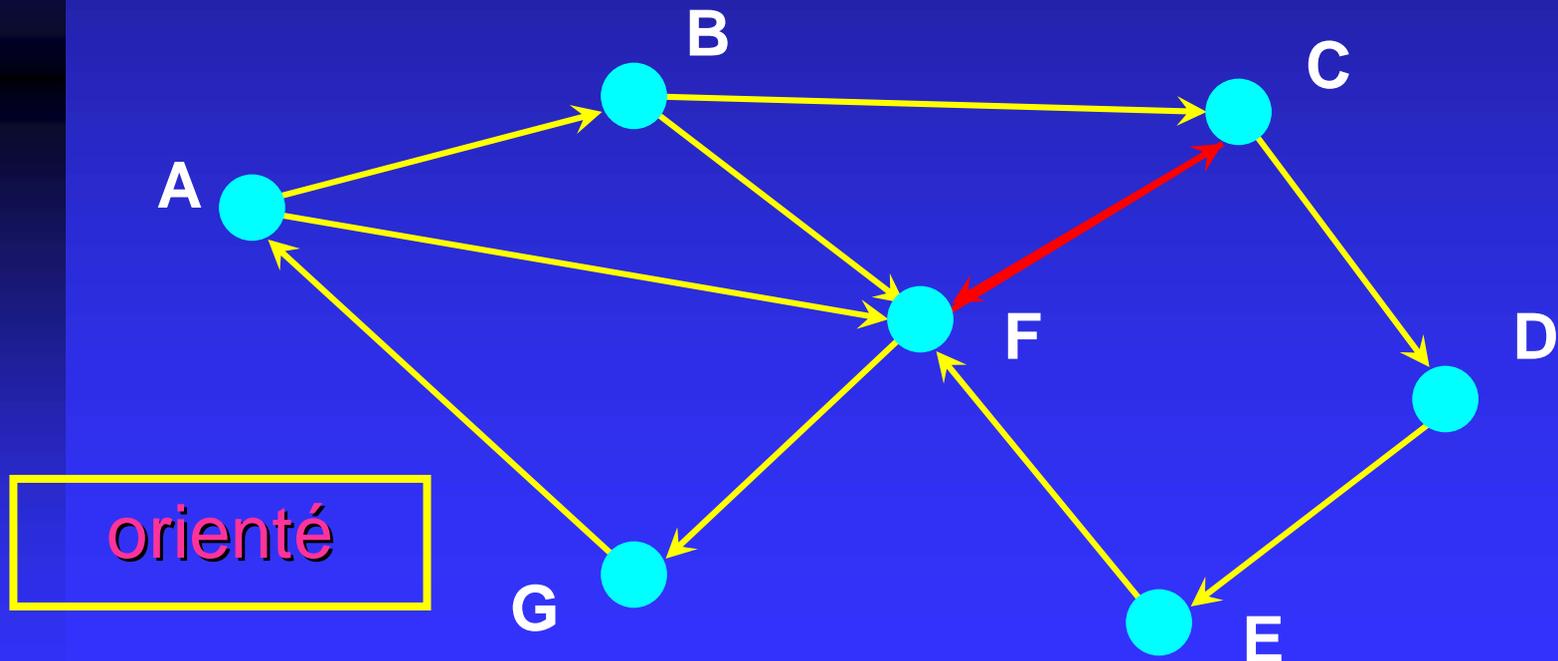
# Modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc.  $\longrightarrow$  sommets  
canaux de communication  $\longrightarrow$  arcs, arêtes



# Modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc.  $\longrightarrow$  sommets  
canaux de communication  $\longrightarrow$  arcs, arêtes



# Quelques applications...

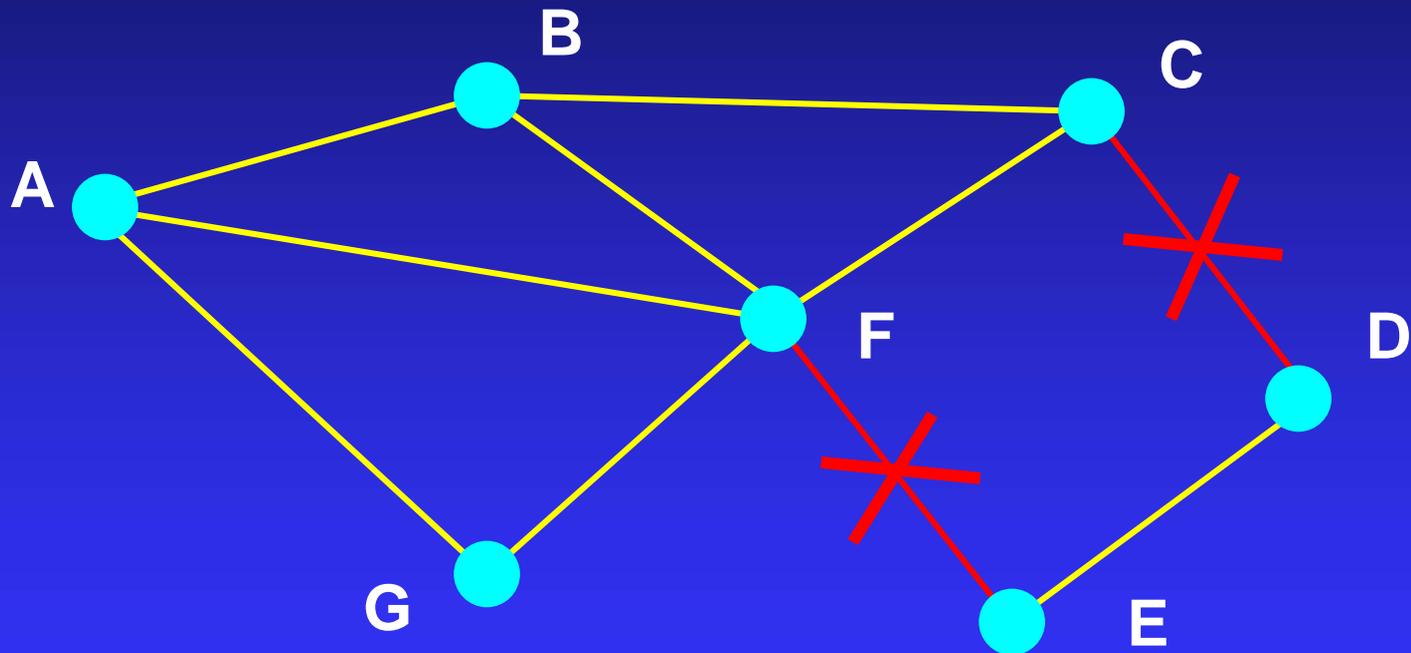
- Mesure de paramètres
  - ◆ fiabilité
  - ◆ charge
- Algorithmes de communication
  - ◆ diffusion de message
  - ◆ routage de messages

# Logiciels...

- calcul de différents paramètres (mesures),
- comparaison de différentes topologies (statique),
- détermination de chemins optimaux (dynamique),
- aide à la conception de réseaux...

# Fiabilité du réseau

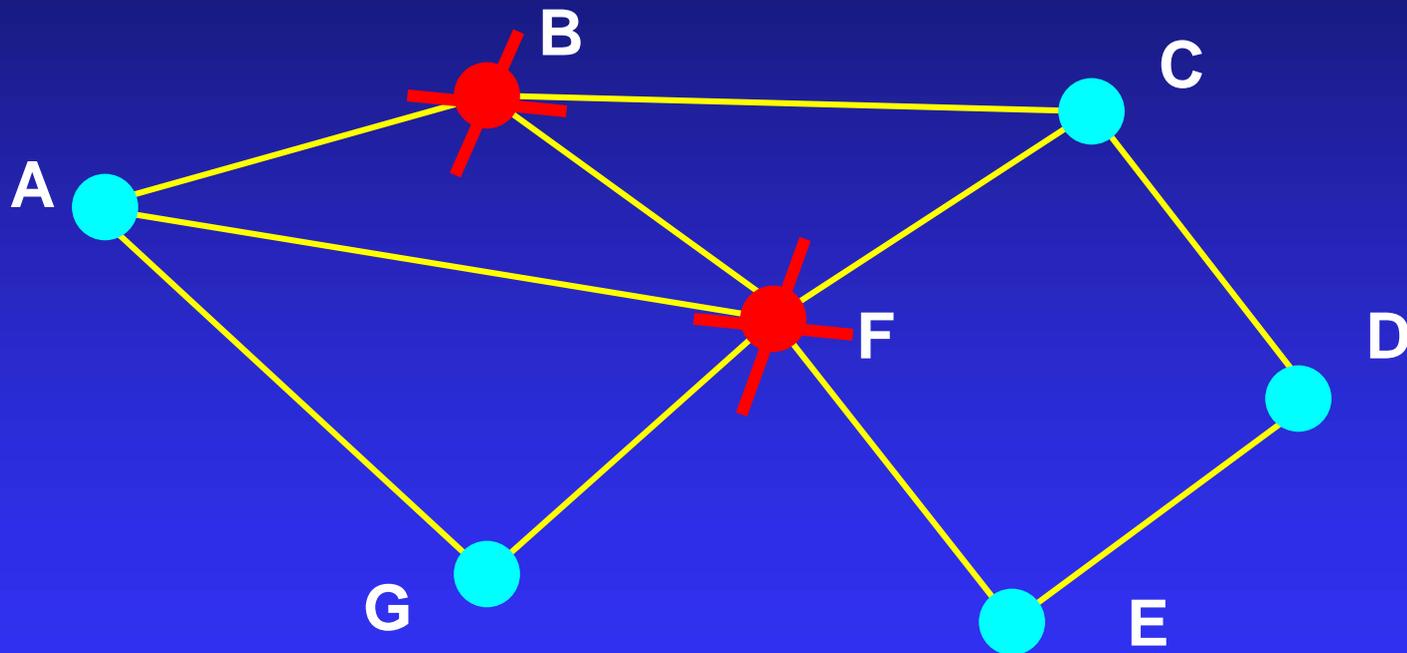
panne des canaux de communication



ensemble d'arêtes déconnectant le graphe

# Fiabilité du réseau

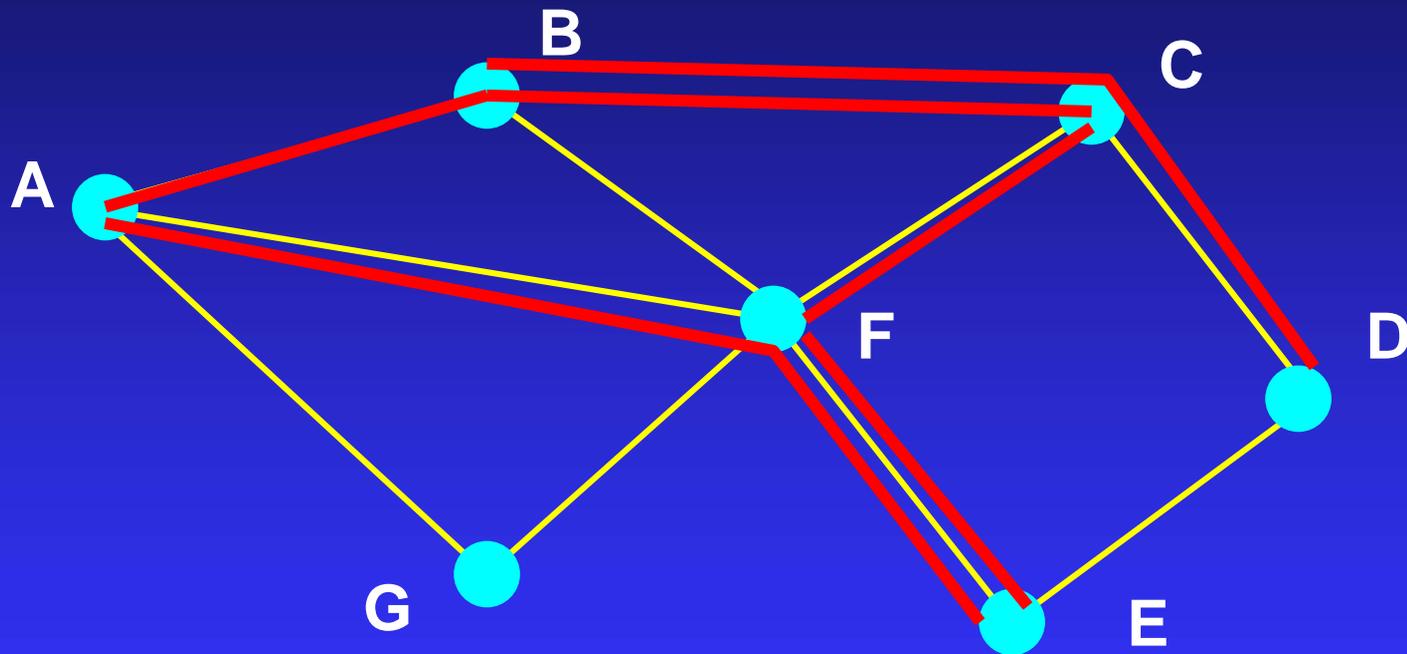
panne des « sommets relais »



ensemble de sommets déconnectant le graphe

# Charge du réseau

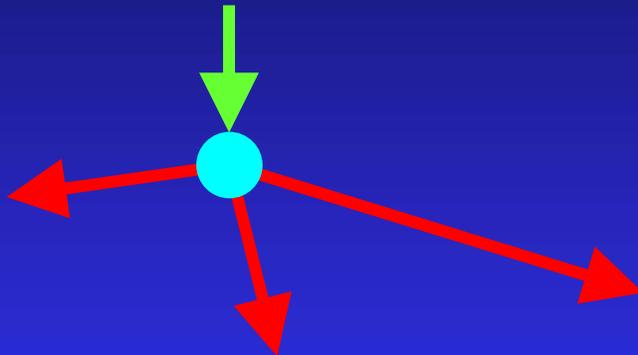
Communications A-C, B-D, A-E, F-C, F-E...



Minimiser la charge des canaux  
*choix de chemins, contraintes de capacité, ...*

# Diffusion d'informations

A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...



## Algorithme 1

Lorsqu'un sommet reçoit l'information pour la première fois, il la diffuse à ses autres voisins...

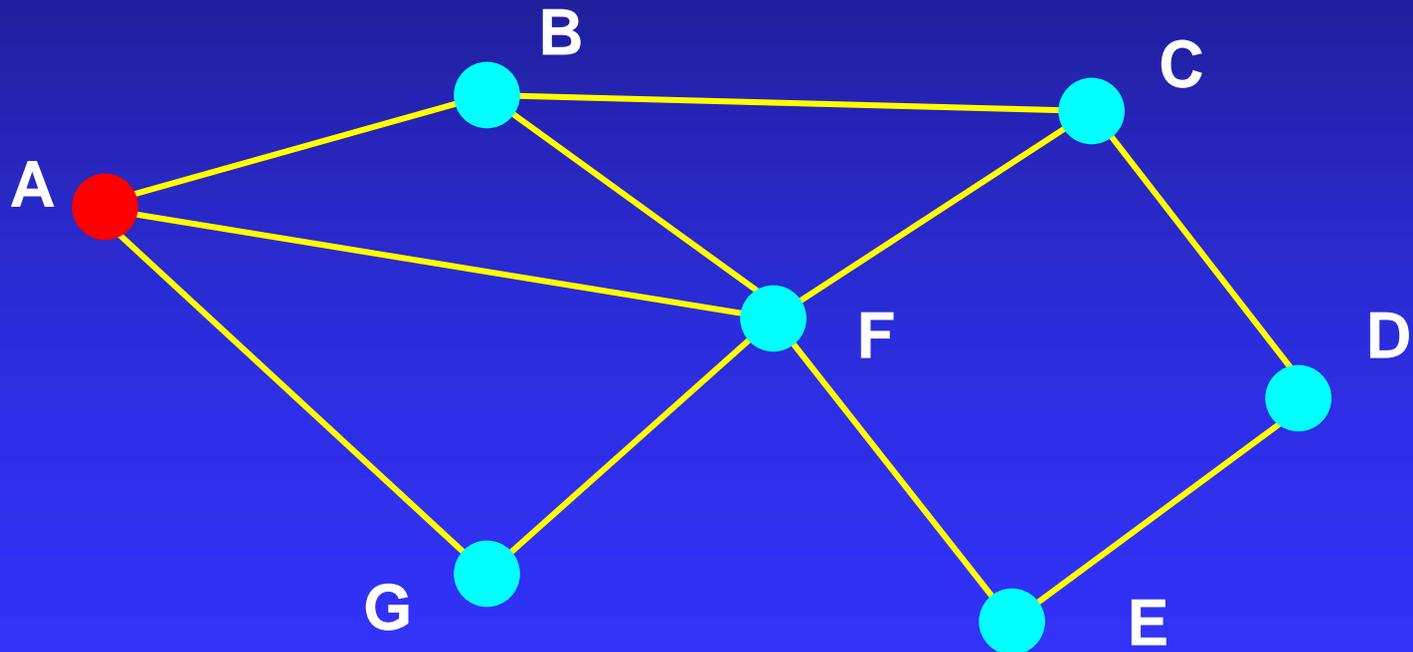
Mesures :

- nombre de messages transmis (charge)
- nombre d'étapes (temps)

# Exemple...

messages : 0

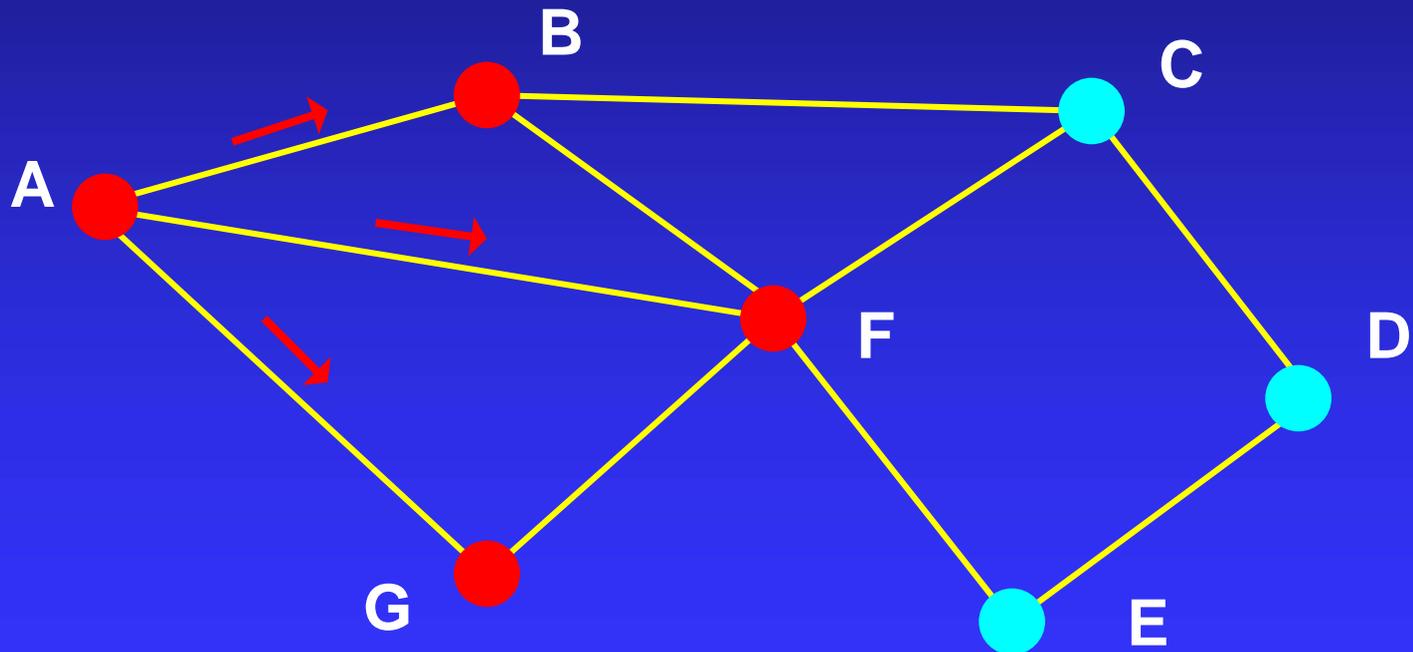
étapes : 0



# Exemple...

messages : 3

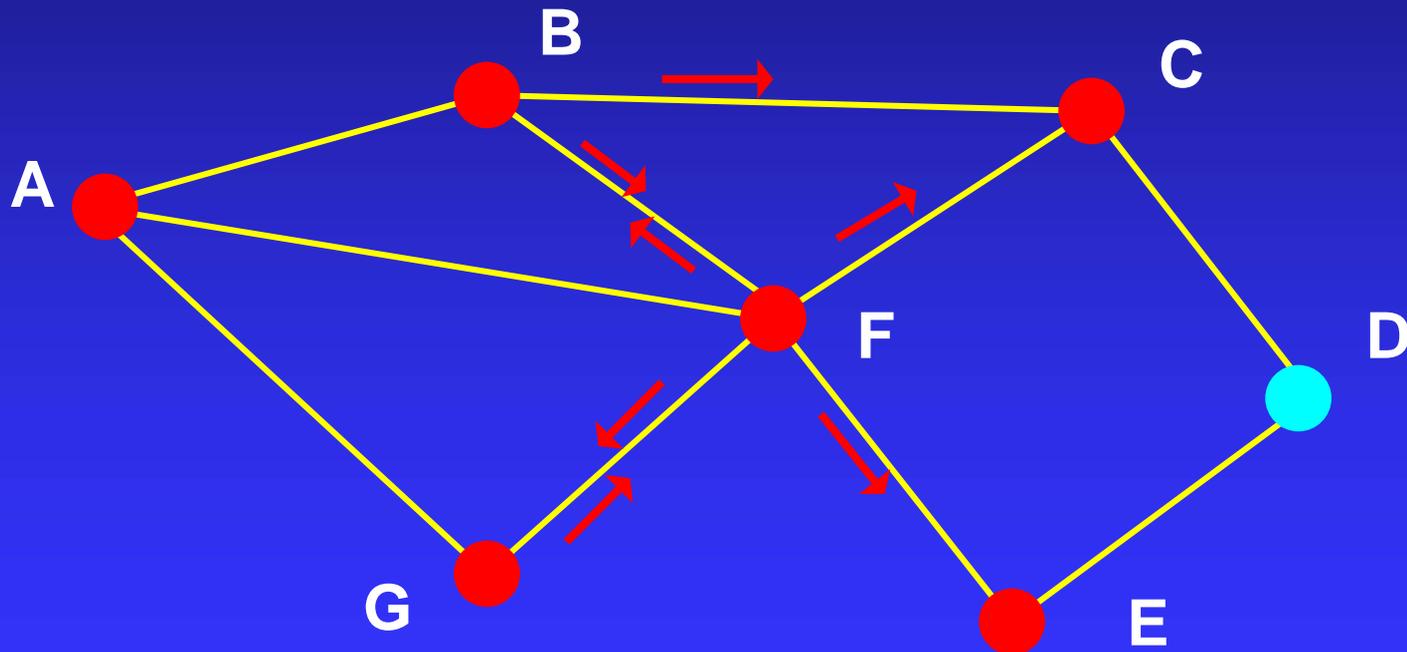
étapes : 1



# Exemple...

messages : 10

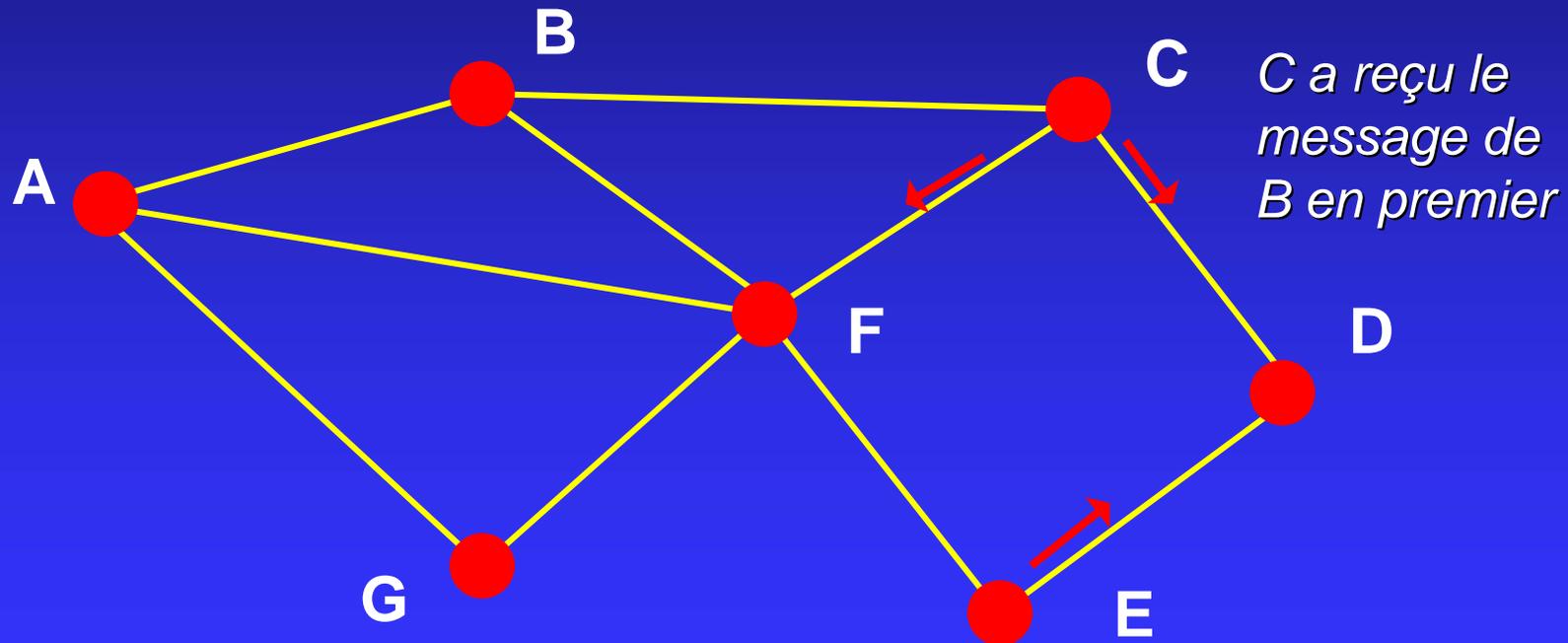
étapes : 2



# Exemple...

messages : 13

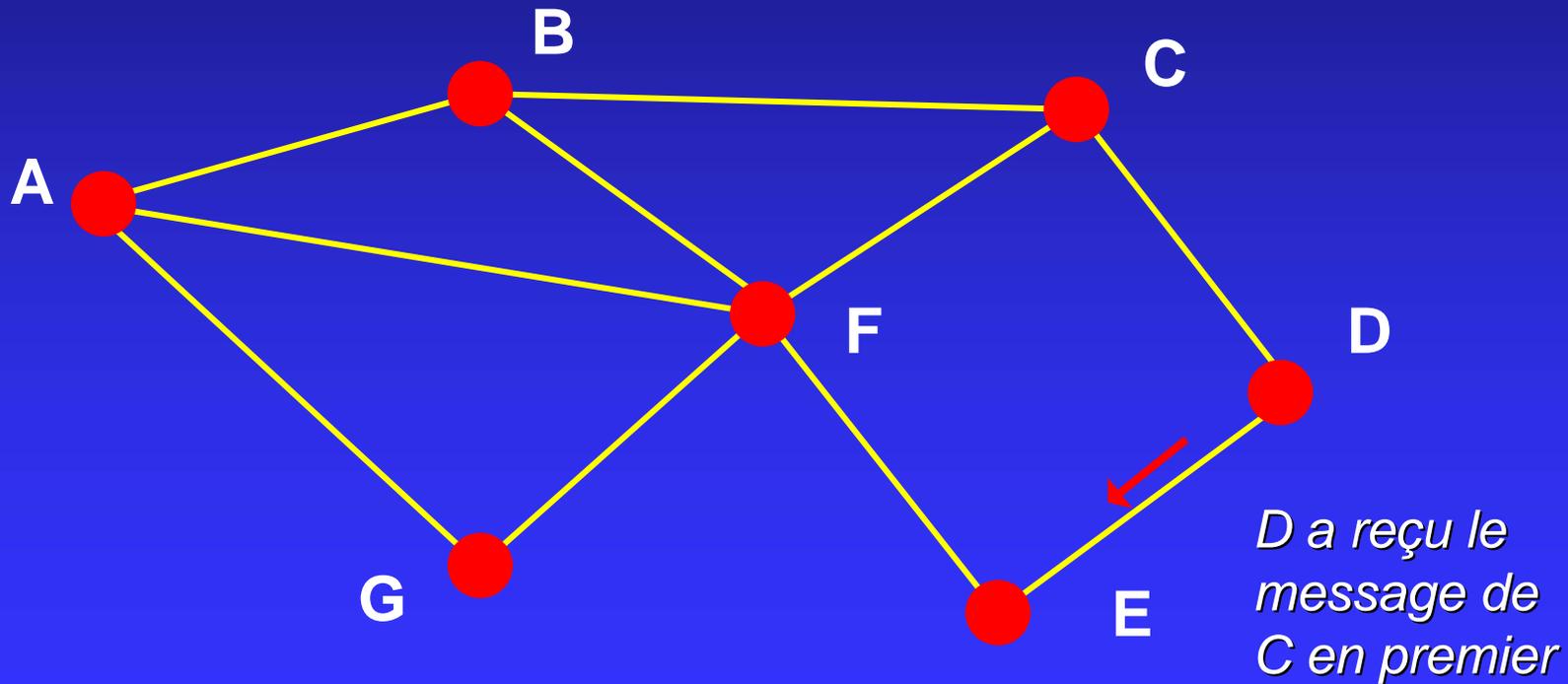
étapes : 3



# Exemple...

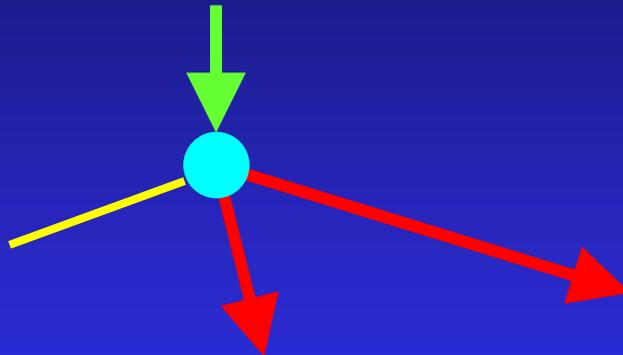
messages : 14

étapes : 4



# Diffusion d'informations

A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...



## Algorithme 2

Idem algorithme 1, mais en utilisant les arêtes d'un arbre recouvrant...

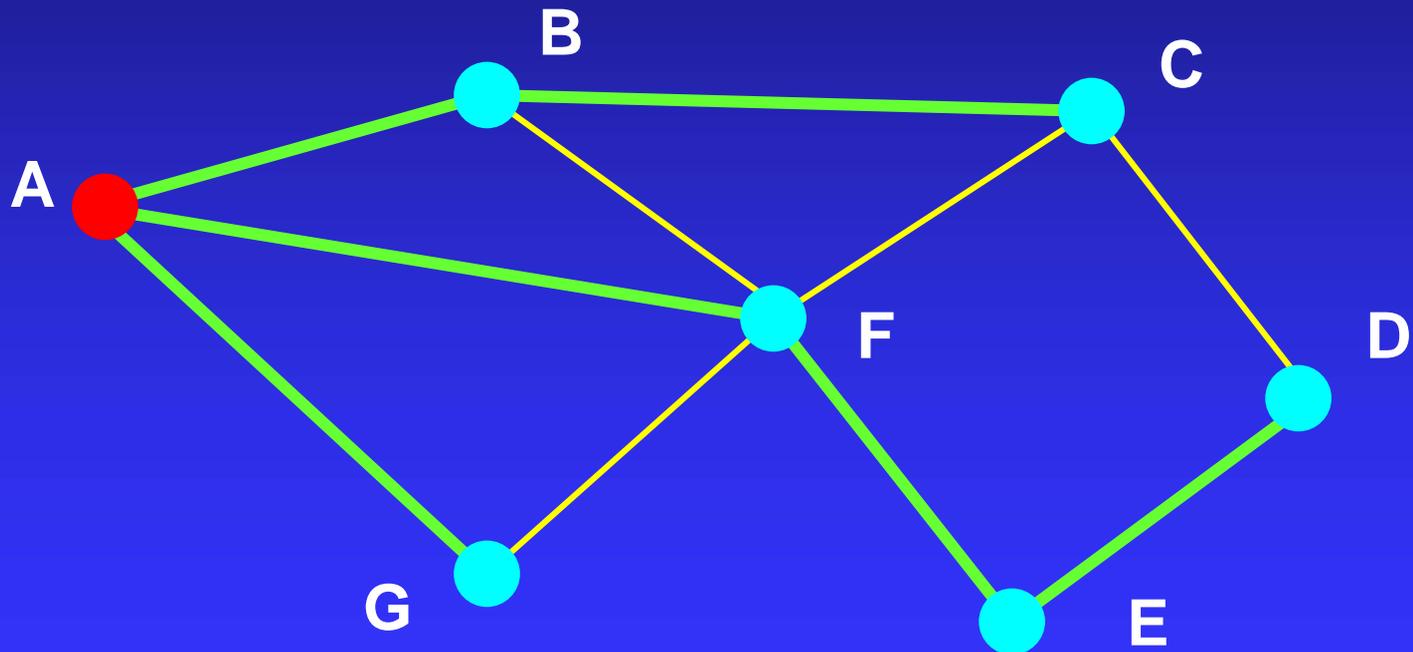
Mesures :

- nombre de messages transmis (charge)
- nombre d'étapes (temps)

# Exemple...

messages : 0

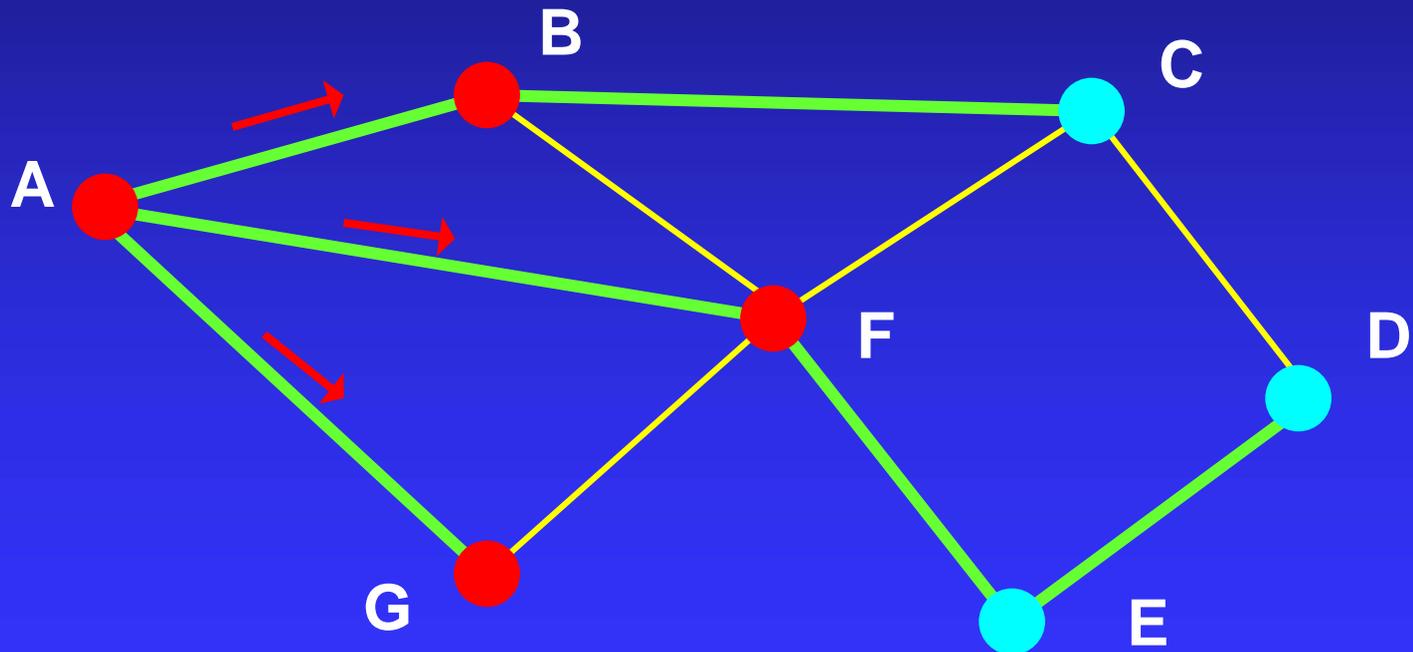
étapes : 0



# Exemple...

messages : 3

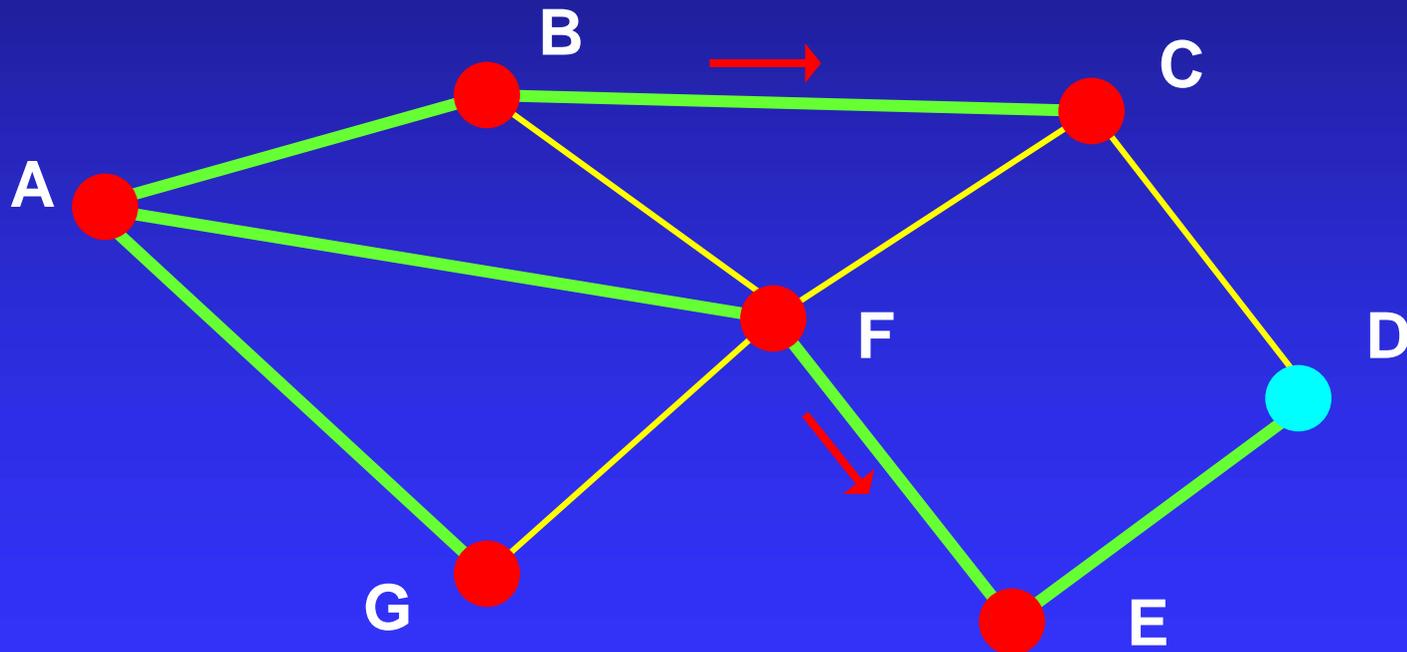
étapes : 1



# Exemple...

messages : 5

étapes : 2



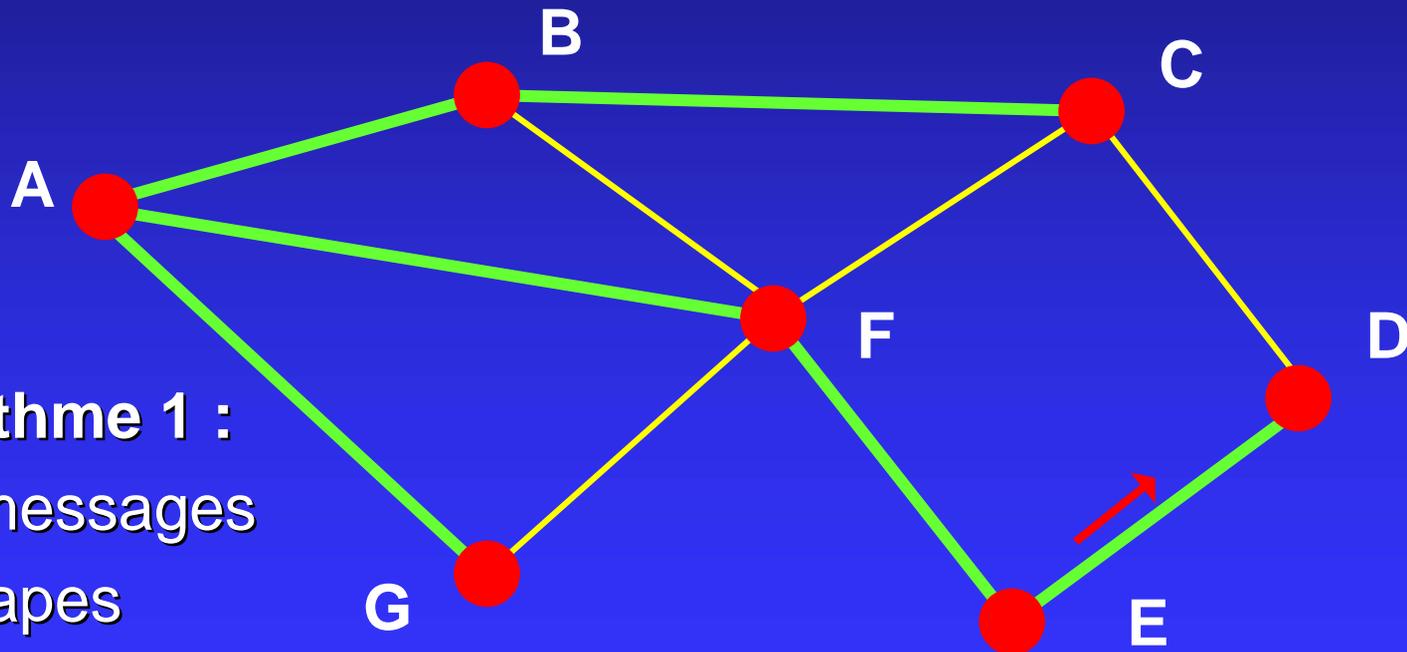
# Exemple...

optimal (6 sommets à informer)

profondeur de l'arbre

messages : 6

étapes : 3

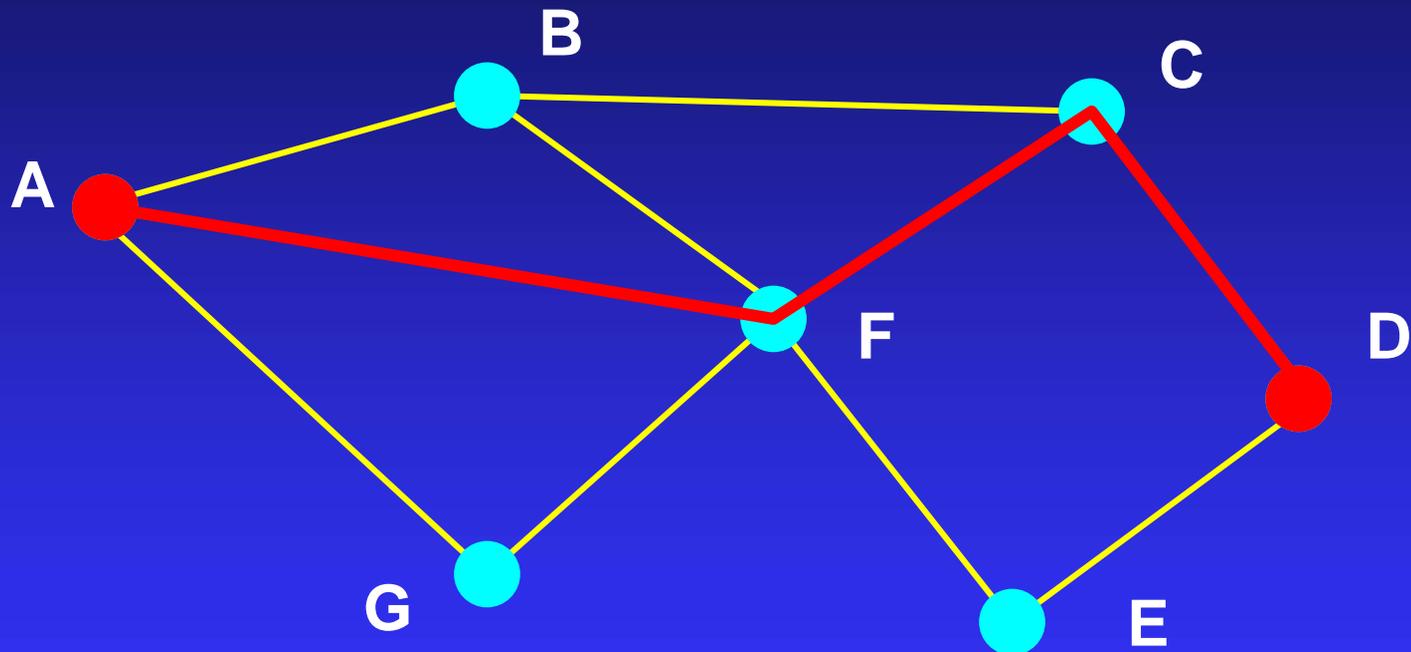


## Algorithme 1 :

- 14 messages
- 4 étapes

# Routage dans les réseaux

A communique avec D via un chemin (route)



Un routage est un ensemble de  $N(N-1)$  routes...

# Routage dans les réseaux

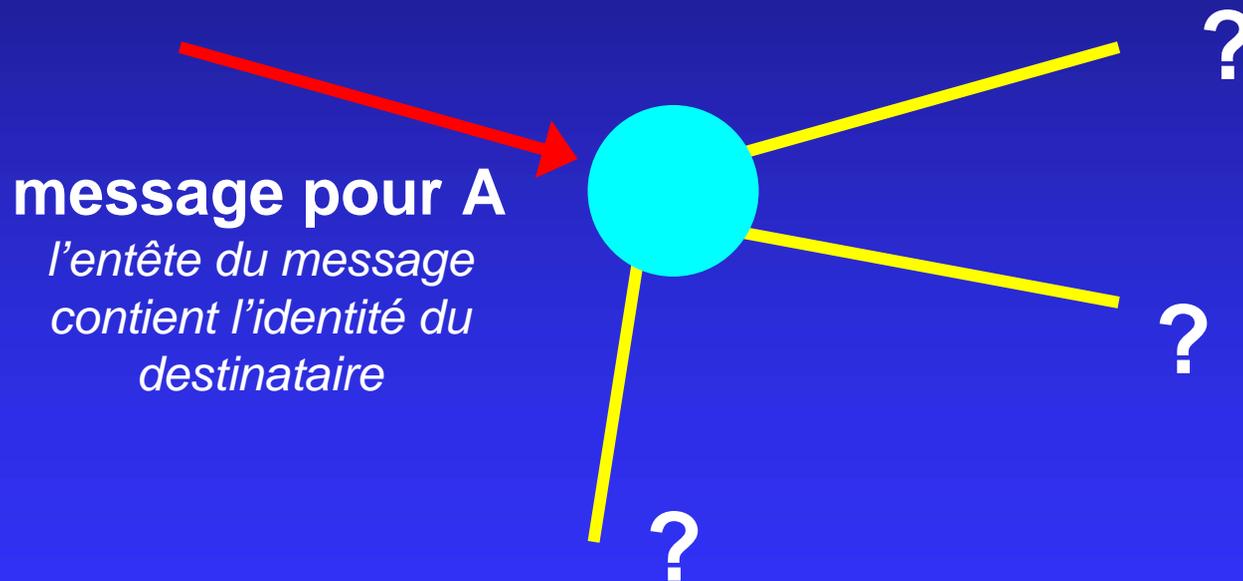
Algorithmes pour calculer un routage :

- minimisant la charge des sommets,
- minimisant la charge des arêtes,
- « raisonnable » en longueur de chemins (dilatation).

réseaux classiques, machines parallèles  
(communications entre processeurs), réseaux  
optiques, etc.

# Mise en œuvre du routage

## Algorithmes de routage



# Mise en œuvre du routage

## Solution 1 : tables de routage

**Chaque sommet possède sa propre table de routage...**

message pour...	sortie
A	1
B	3
C	1
etc.	etc.

Coûteux en place mémoire...

# Mise en œuvre du routage

## Solution 2 : routage par intervalles

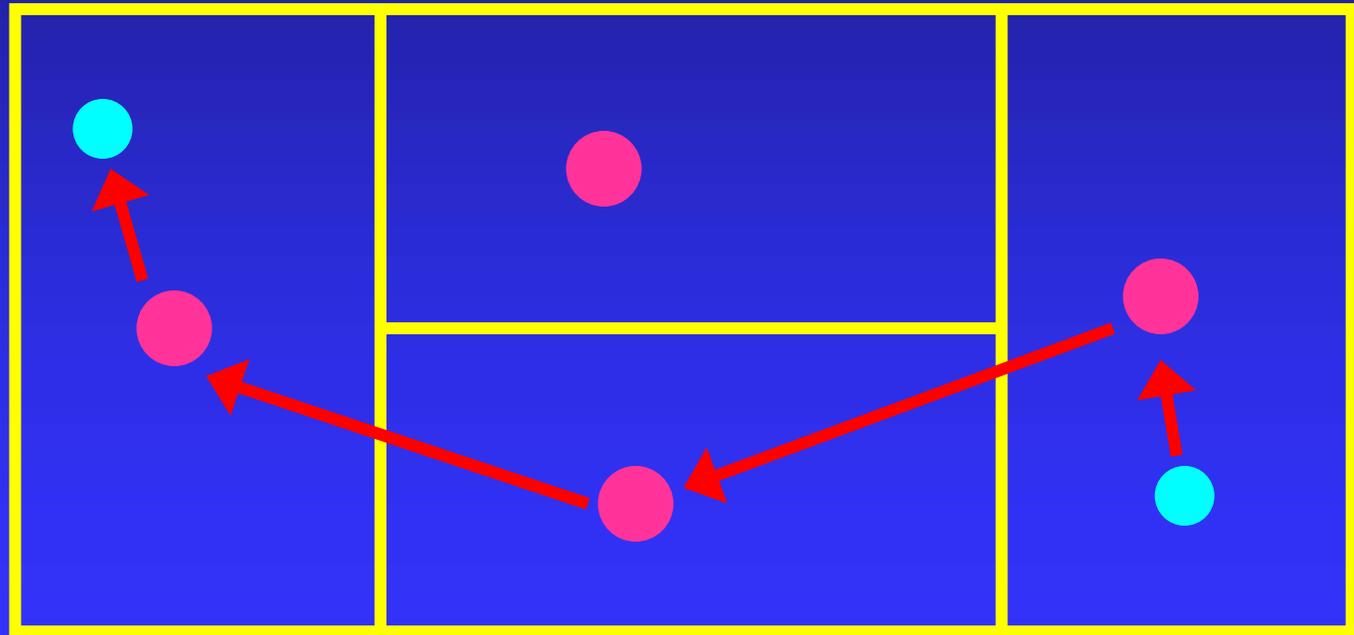
**Chaque sommet possède sa propre table de routage...**

message pour...	sortie
[1,8]	1
[9,26]	3
[27,32]	2

1. Trouver une « bonne » numérotation des sommets,
2. Trouver un « bon » routage (dilatation).

# Hiérarchisation des sommets

- Graphe découpé en régions
- Chaque région possède une « capitale »
- Communications via les capitales



# Hiérarchisation des sommets

- Graphe découpé en régions
- Chaque région possède une « capitale »
- Communications via les capitales

## **Table de routage CAPITALE**

sa région + réseau des capitales

## **Table de routage VILLE**

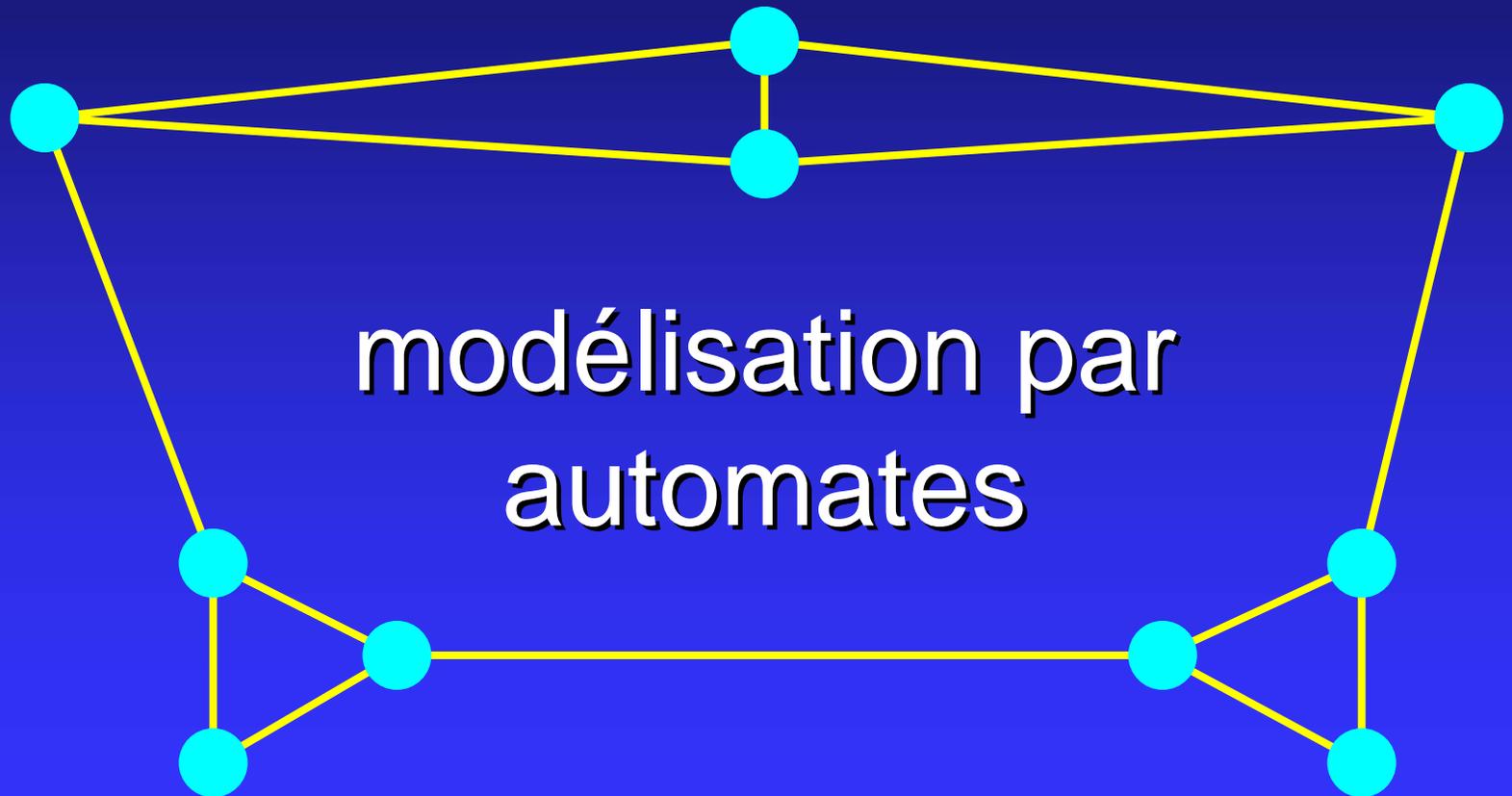
sa région

*Possibilité de hiérarchies à plusieurs niveaux...*

# Routage dynamique (adaptatif)

- Les « paires communicantes » évoluent dans le temps...
- Le réseau évolue...
  - *Machines parallèles,*
  - *Téléphonie mobile...*  
*Contraintes sur le nombre de chemins empruntant une arête (fréquences)*

# Fonctionnement de systèmes



# Modélisation par un automate



*Les événements déclenchent des actions (réactions) du système selon l'état dans lequel celui-ci se trouve...*

**Automate déterministe** : pour chaque état, au plus une transition par événement...

# Exemple 1 : une porte...

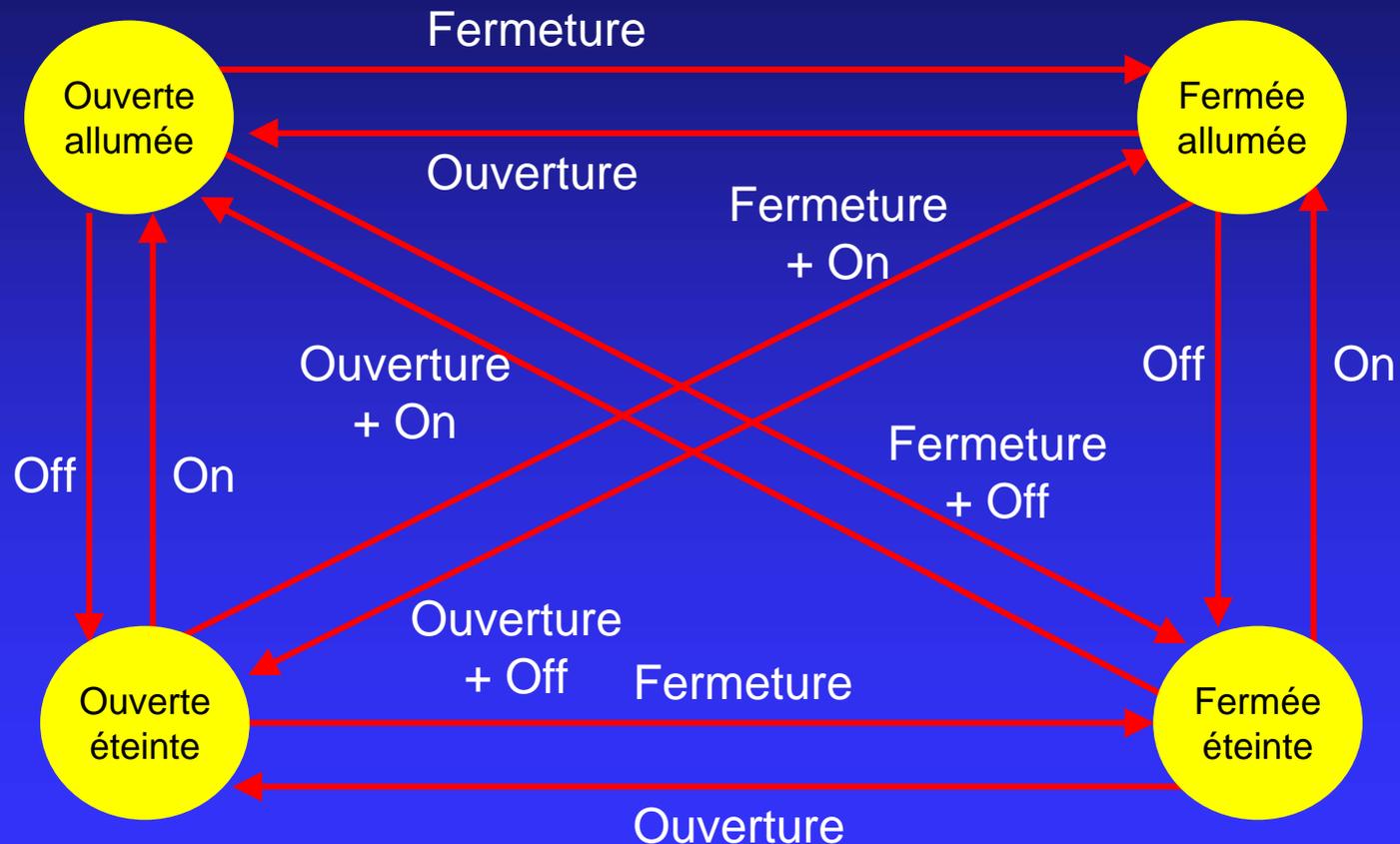


## Exemple 2 : une ampoule...



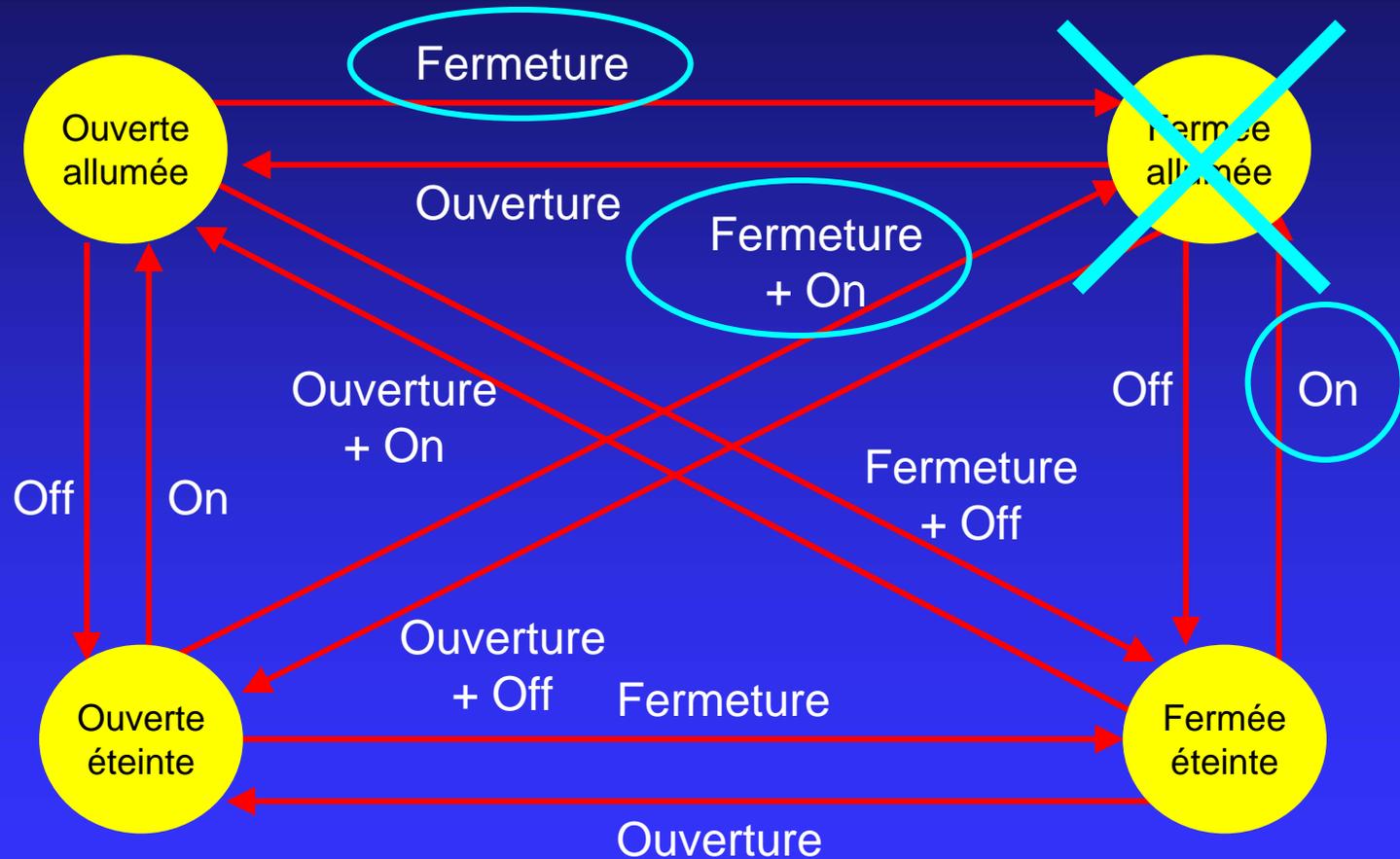
# Produit d'automates

Exemple 1 : une pièce d'habitation...



# Produit d'automates

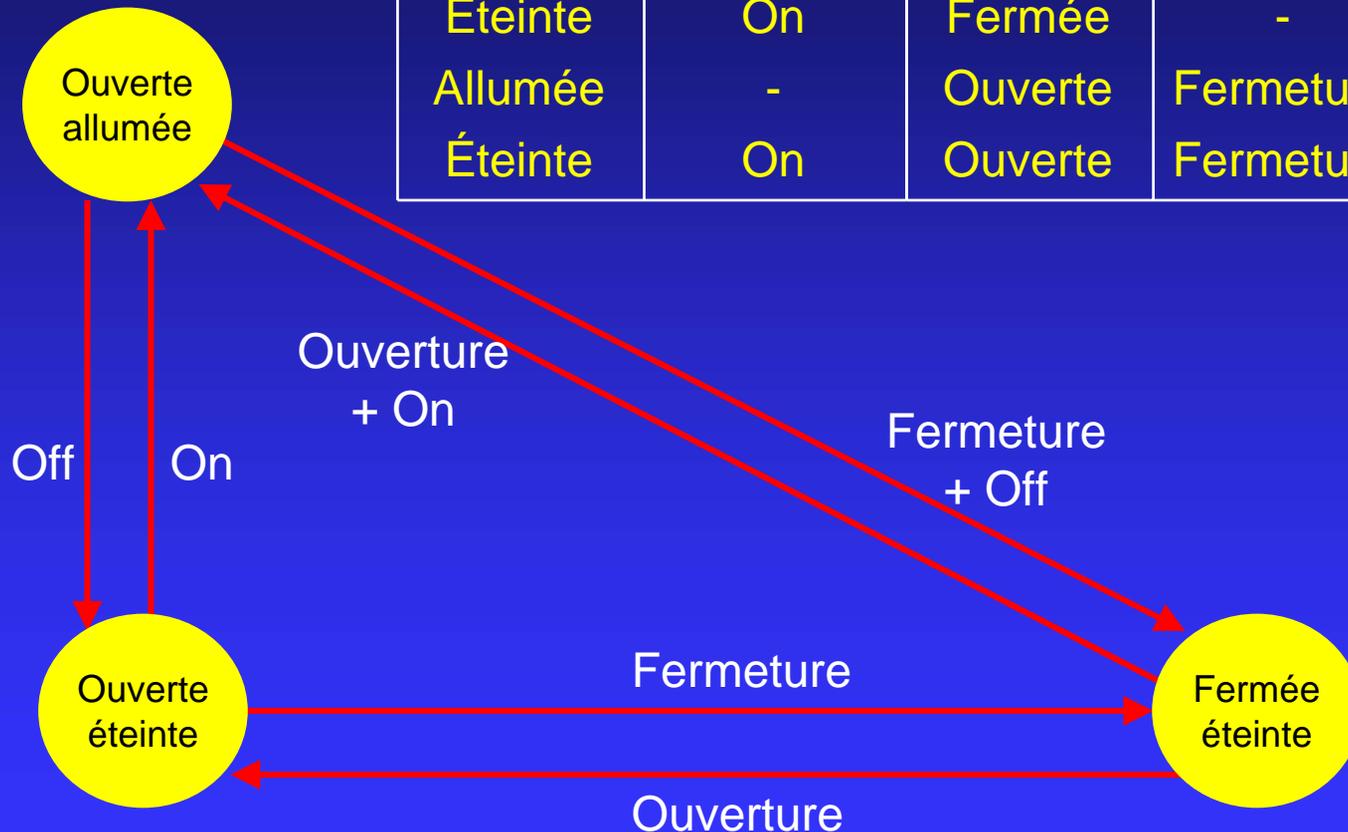
## Exemple 2 : un réfrigérateur...



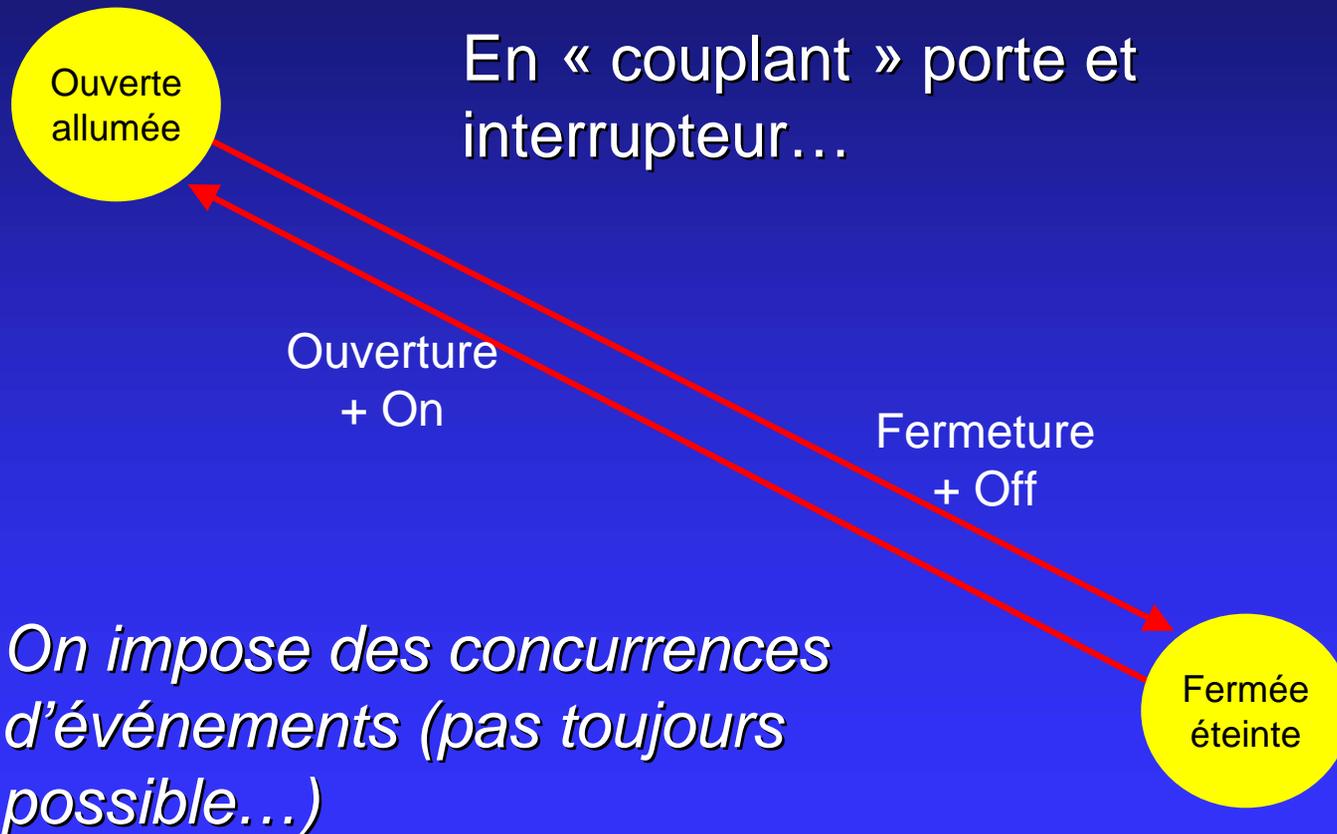
# Produit d'automates avec contraintes

## INTERDIT

Ampoule		Porte	
Éteinte	On	Fermée	-
Allumée	-	Ouverte	Fermeture
Éteinte	On	Ouverte	Fermeture



# Produit d'automates avec contraintes



## En pratique...

- Modéliser le système par un automate ou plusieurs automates « synchronisés ».  
*notion de sous-système...*  
*explosion combinatoire, calculs « à la volée »...*
- Vérifier certaines propriétés de l'automate.  
*états inaccessibles, états « vivaces », interblocages, etc. (problèmes de chemins)*
- Rectifier en conséquence... et valider !

# Quelques applications...

- Conception de systèmes (respect des spécifications),
- Outils d'aide à la vérification de systèmes (sûreté de fonctionnement),
- Outils de vérification de logiciels,
- etc.

*aéronautique, aérospatiale, transport  
ferroviaire, nucléaire, réseaux  
téléphoniques, réseaux informatiques,  
électronique, ...*

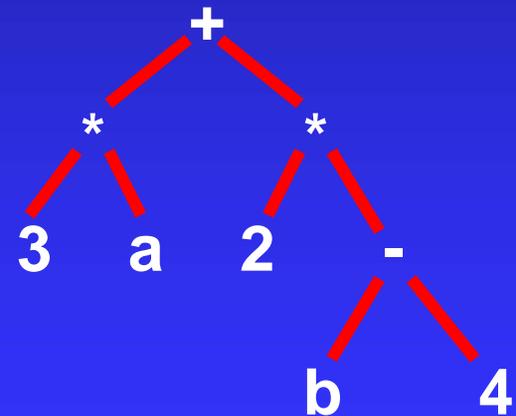
# Techniques de compilation

## Représentation d'un programme par un arbre

expression  
arithmétique

$3 * a + 2 * (b - 4)$

codage par  
un arbre



# Techniques de compilation

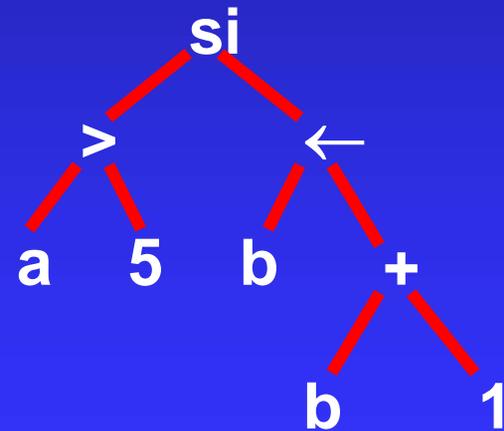
## Représentation d'un programme par un arbre

instruction

si (a > 5)  
alors b ← b + 1

Programme  $\Rightarrow$  graphe  
(sous-arbres communs)

codage par  
un arbre



# Techniques de compilation

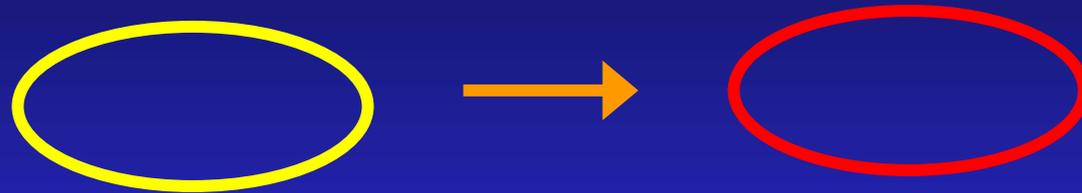
Principe général :

- Analyse du texte source (programme)  
erreurs éventuelles  
codage du source (arbre ou graphe)
- Traduction du codage en un autre langage  
(langage machine, ...)

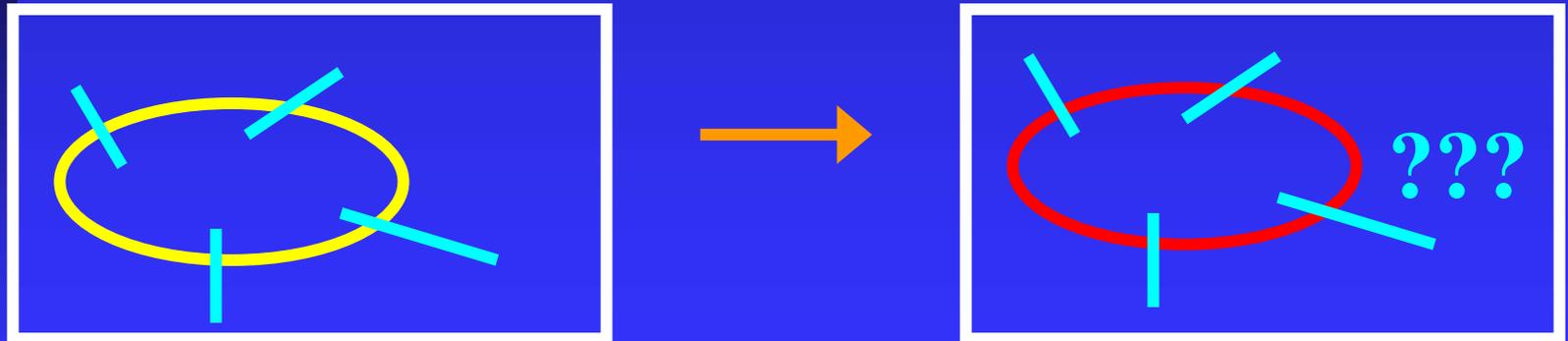
*Langage interprété : exécution du codage par l'interpréteur...*

# Grammaires de graphes...

Règle de remplacement



Réécriture d'un graphe

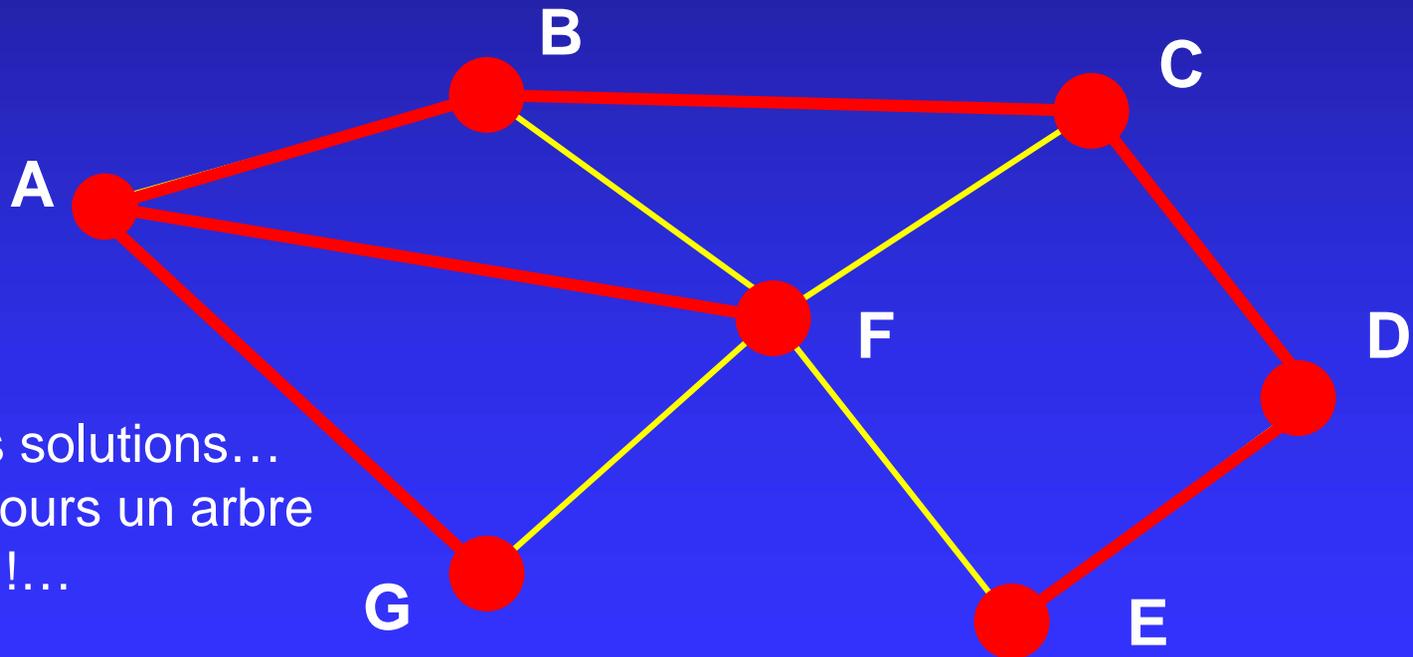


# Construction d'un arbre couvrant

Règle de remplacement



Réécriture d'un graphe



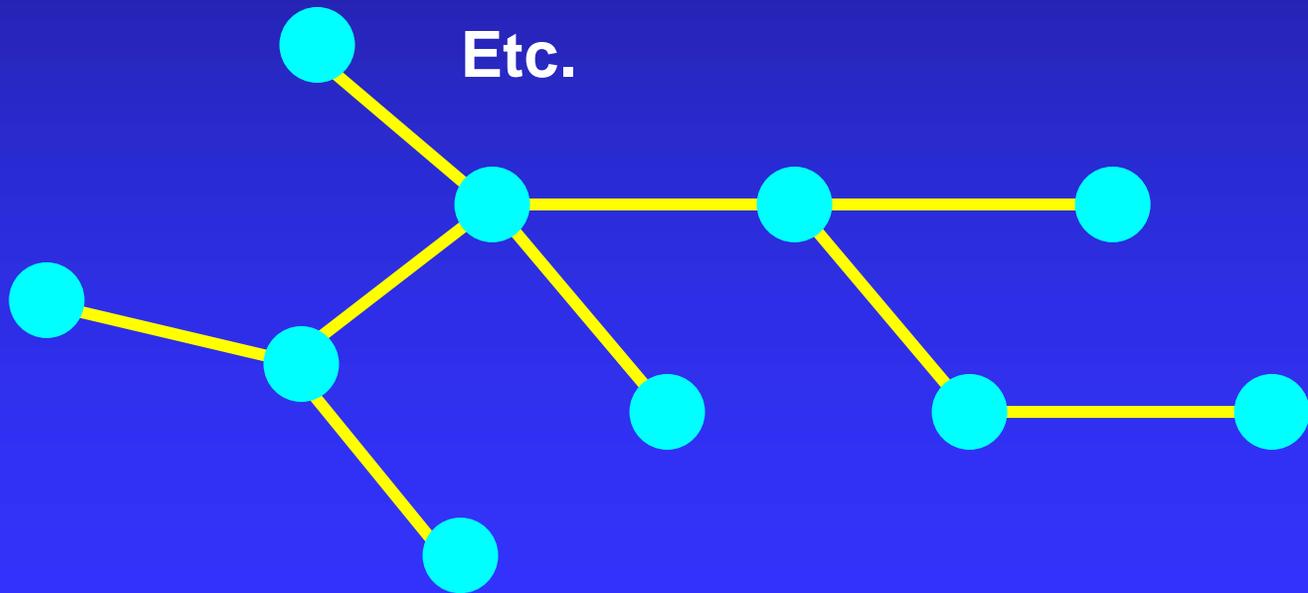
Plusieurs solutions...  
mais toujours un arbre  
couvrant !...

# Construction d'arbres

Règle de remplacement



Réécriture d'un graphe



# Le graphe de Kevin Bacon

- Sommets = acteurs
- Arêtes entre acteurs ayant joué dans un même film...

**Propriété :**  
**Tout acteur est à distance au plus 6 de Kevin Bacon !...**



# Le graphe de Kevin Bacon (2)

**Site Web :**

**<http://www.fast-rewind.com/bacon.htm>**

**The Oracle of Bacon at Virginia**

**Louis de Funes has a Bacon number of 2.**

Louis de Funes was in *Aventures de Rabbi Jacob*, Les (1973) with Janet Brandt

Janet Brandt was in *Queens Logic* (1991) with Kevin Bacon

# Le graphe de Kevin Bacon (3)

**Site Web :**

**<http://www.fast-rewind.com/bacon.htm>**

**The Oracle of Bacon at Virginia**

**Catherine Deneuve has a Bacon number of 2.**

Catherine Deneuve was in *Anima persa* (1977) with Vittorio Gassman

Vittorio Gassman was in *Sleepers* (1996) with Kevin Bacon

# Le graphe de Kevin Bacon (4)

**Site Web :**

<http://www.fast-rewind.com/bacon.htm>

**The Oracle of Bacon at Virginia**

**Audrey Tautou has a Bacon number of 3.**

Audrey Tautou was in Venus beaute (institut) (1999) with Bulle Ogier

Bulle Ogier was in Merci Docteur Rey (2002) with Eli Wallach

Eli Wallach was in Mystic River (2003) with Kevin Bacon