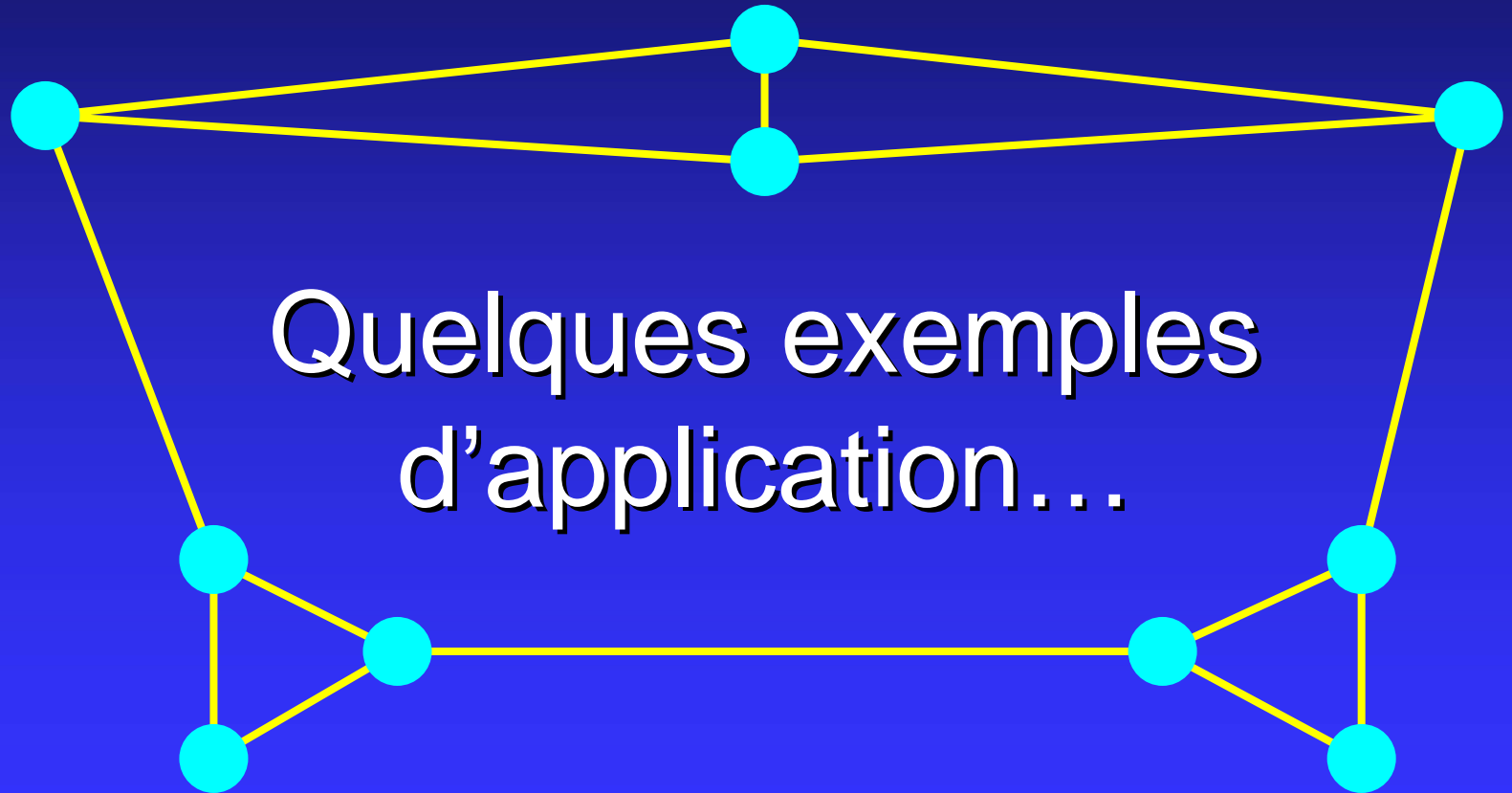


Théorie des graphes



Plan de la présentation

- Introduction

rappel de quelques définitions de base, bref historique, un premier exemple...

- Quelques exemples d'application

Chimie, sociologie, bio-informatique, recherche opérationnelle, réseaux de communication, fonctionnement de systèmes, etc.

Présentation consultable :

<http://www.ac-bordeaux.fr/>

[Pedagogie/Maths/peda/lyc/graphes.htm](http://www.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/peda/lyc/graphes.htm)

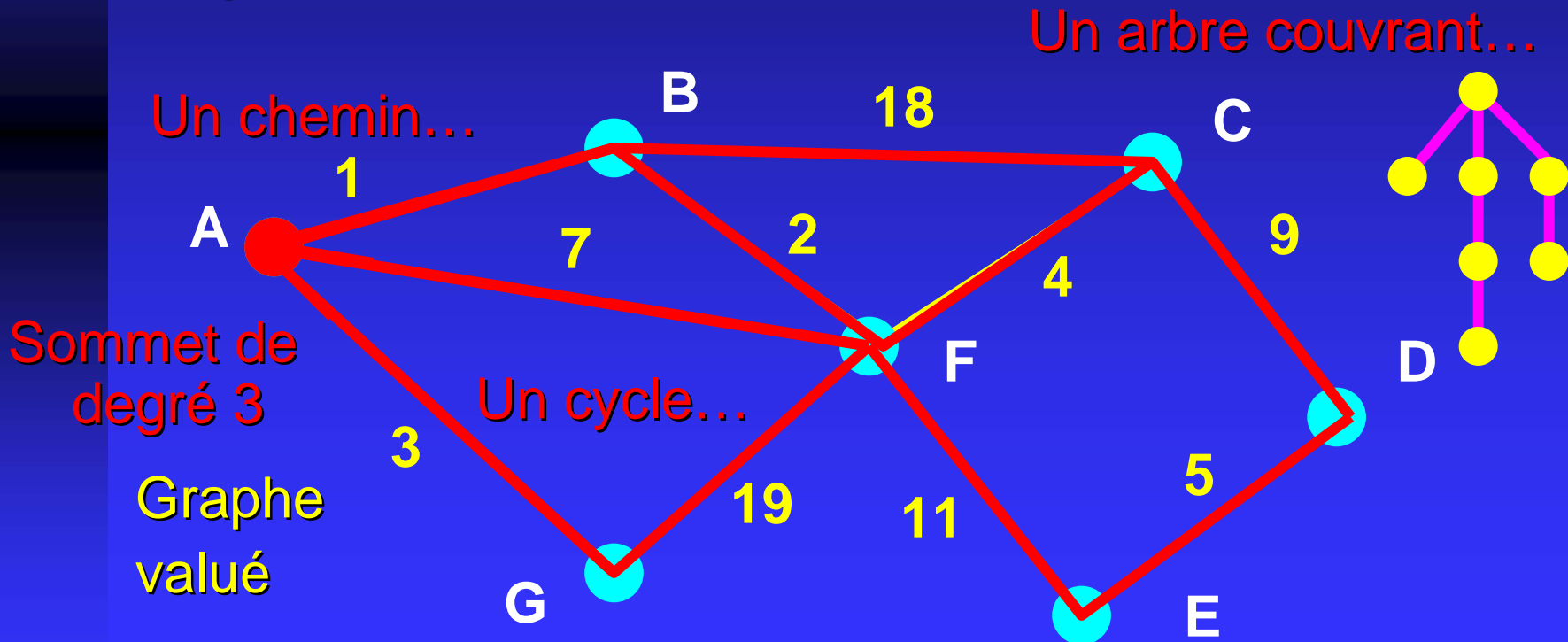
Merci de votre
attention...

sopena@labri.fr

Notions élémentaires...

Graphes non orientés

- Un ensemble de sommets
- Un ensemble d'arêtes

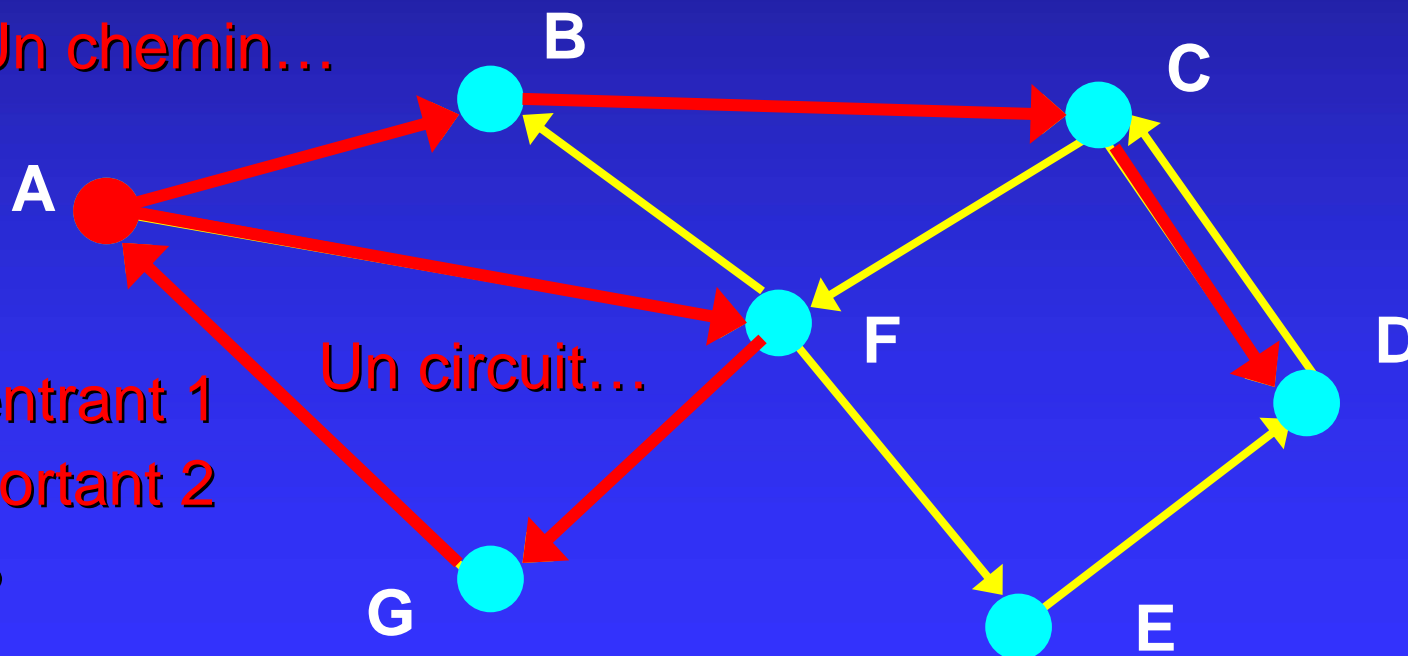


Notions élémentaires...

Graphes orientés

- Un ensemble de sommets
- Un ensemble d'arcs

Un chemin...

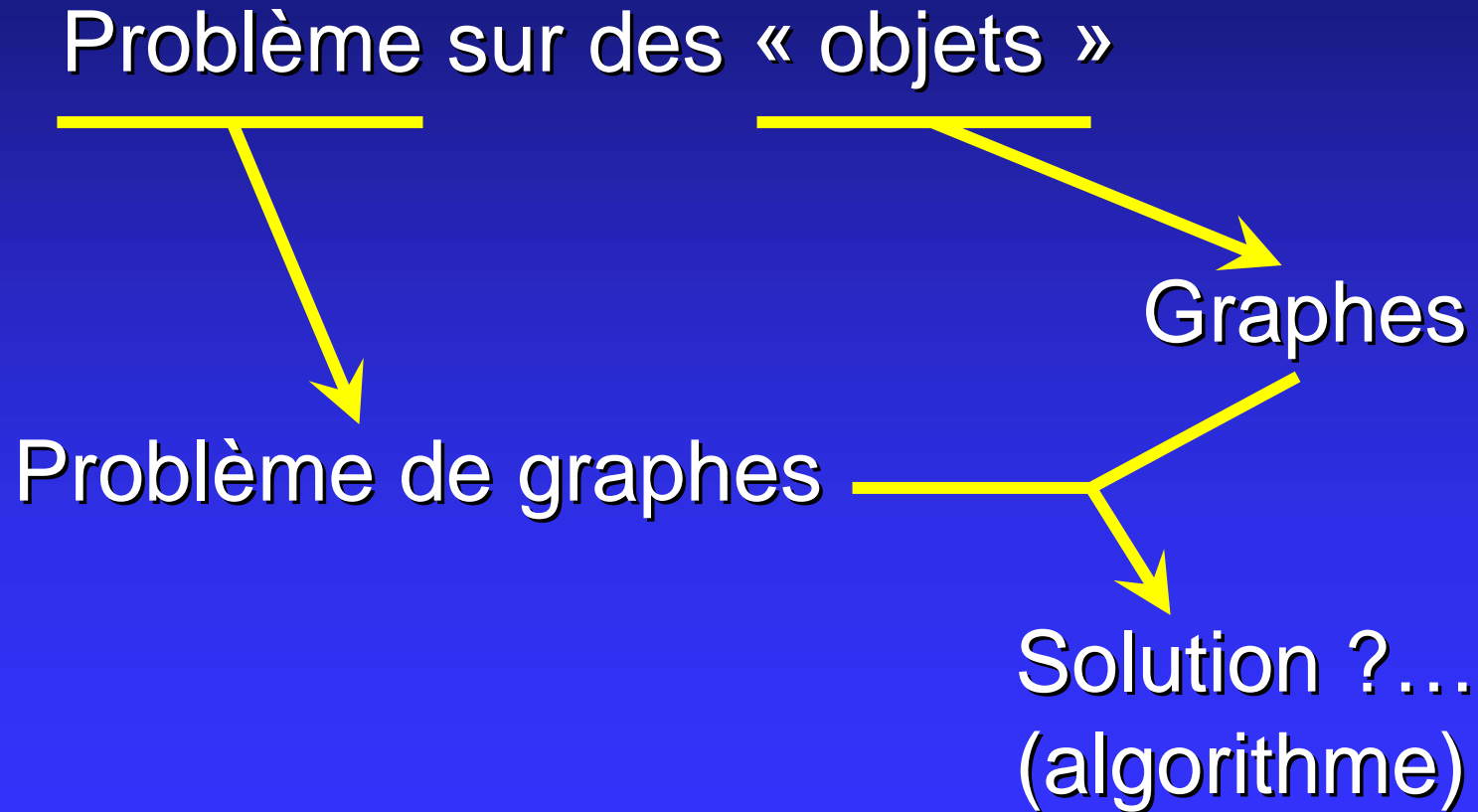


Degré entrant 1
Degré sortant 2
Degré 3

Bref historique...

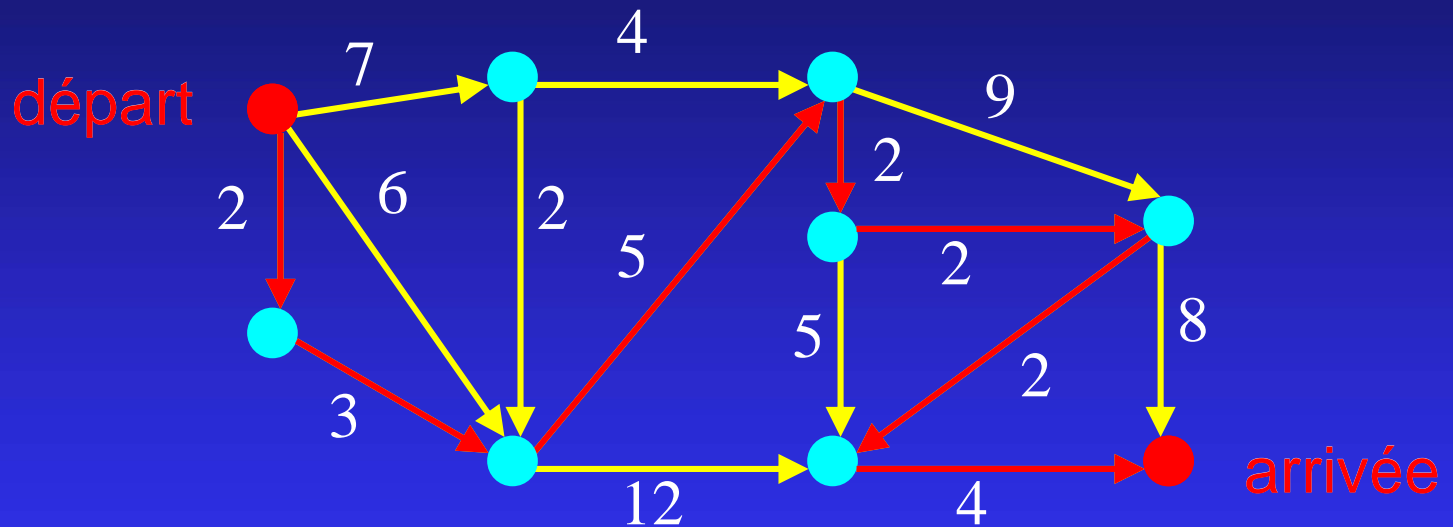
- 1736, Euler : les ponts de Königsberg
... récréations mathématiques ...
... chimie, électricité ...
- 1852, De Morgan (Guthrie) : quatre couleurs
- 1946, Kuhn, Ford et Fulkerson, Roy, etc.
... recherche opérationnelle ...
- Depuis 1960, applications... (informatique)

Un outil pour la modélisation (et la résolution !...) de problèmes



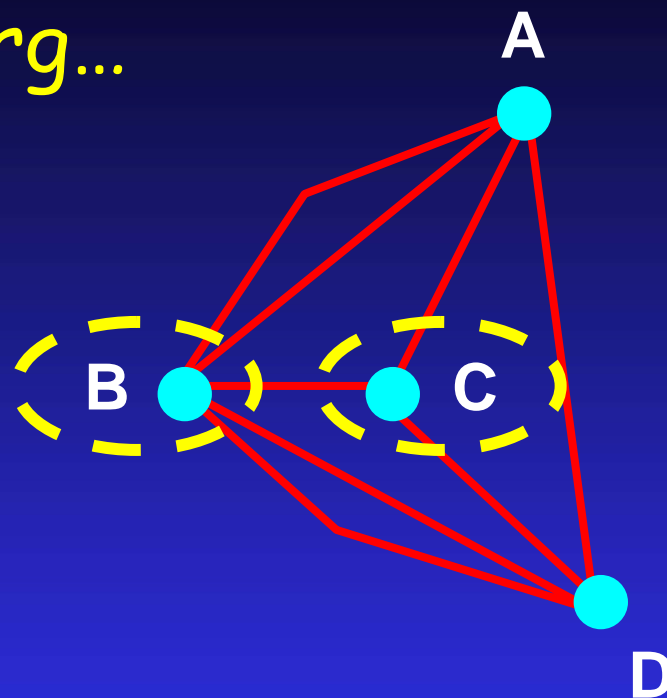
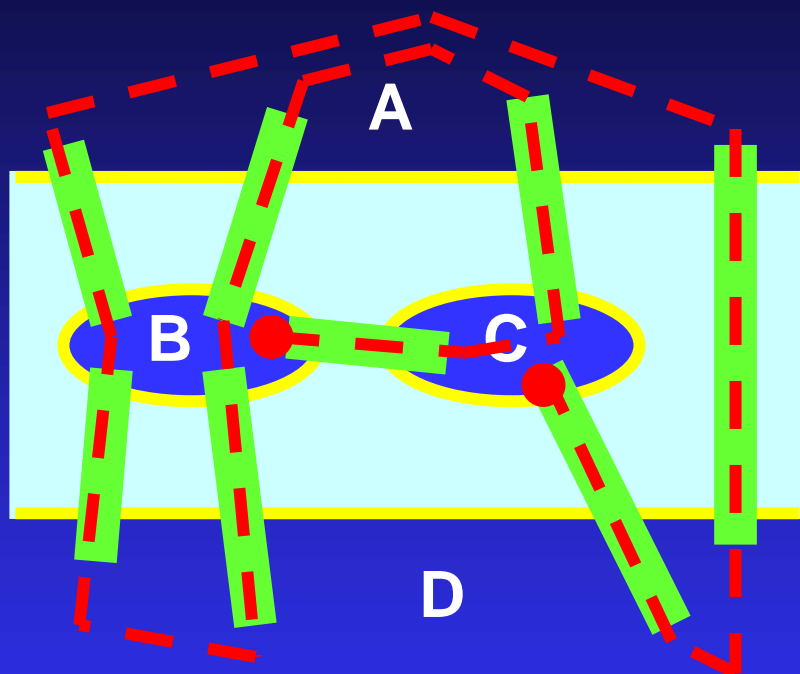
Exemple : meilleur trajet...

Objet : plan de ville, durée de trajet pour chaque tronçon



- Problème de plus court chemin dans un graphe valué (algorithmes connus...)
- Version « dynamique » (évolution de la valuation)

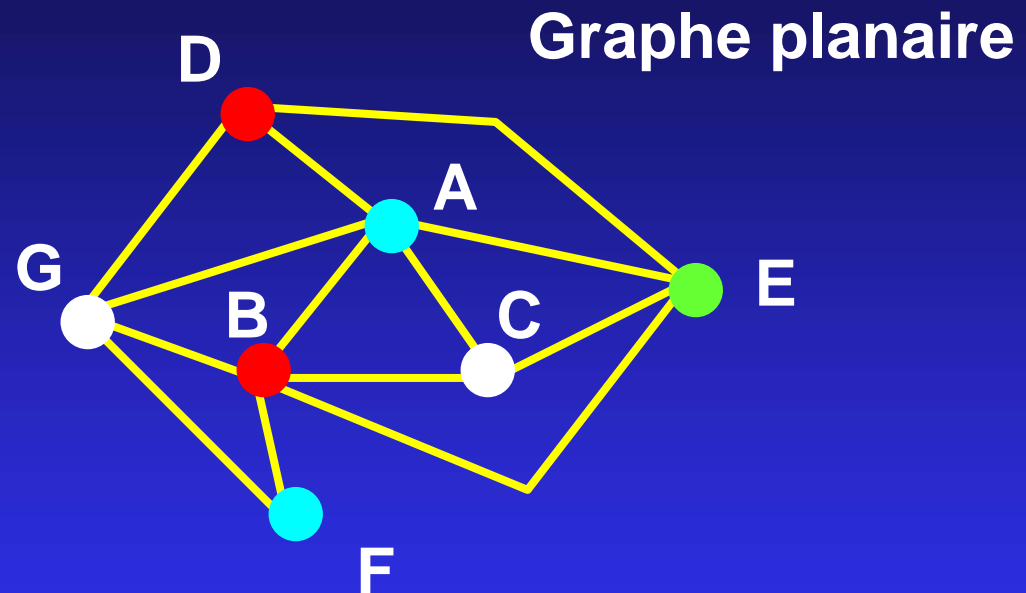
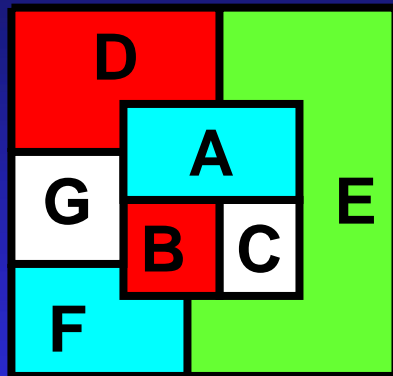
Les ponts de Königsberg...



Il existe un cycle « eulérien » si et seulement si tous les sommets sont de degré pair...

Il existe un chemin « eulérien » si et seulement si 0 ou 2 sommets sont de degré impair...

Le problème des quatre couleurs...



Tout graphe planaire est coloriable en utilisant quatre couleurs au plus... [Appel & Haken, 1977]

Quelques domaines d'application...

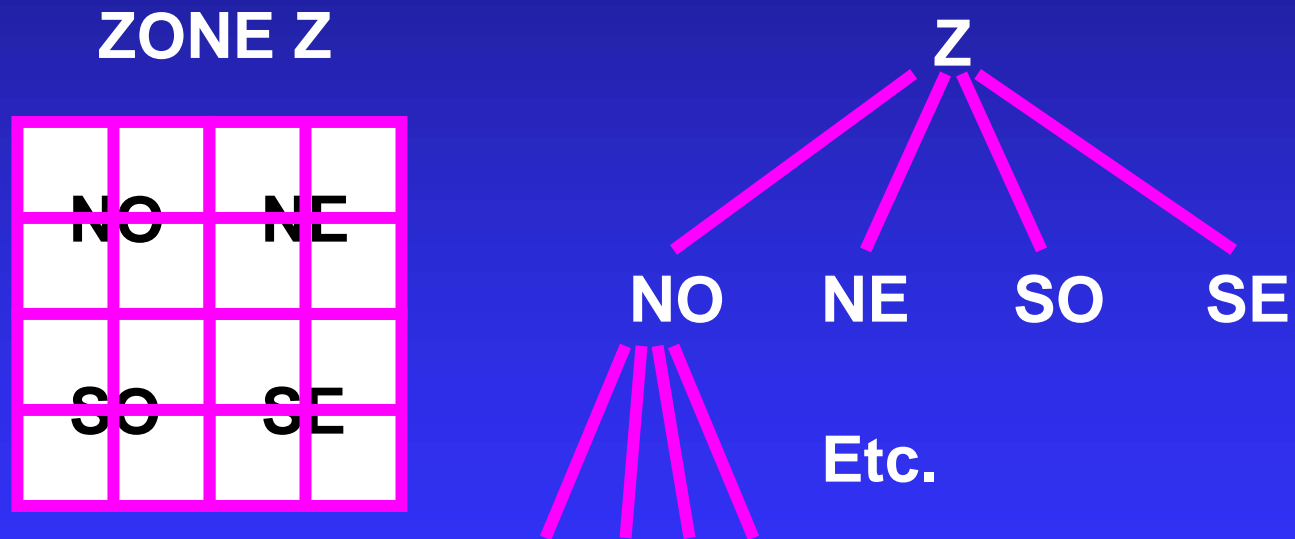
- Chimie
- Sociologie
- Bio-informatique
- Recherche opérationnelle
- Réseaux de communication
- Fonctionnement de systèmes

Autres domaines d'application...

- Géographie (cartographie), architecture (plans), linguistique (sémantique), etc.
- Le WEB (graphe des liens, calcul de pertinence dans les moteurs de recherche, etc.)
- Graphes « petits mondes » (Kevin Bacon)
- Les réseaux optiques (producteurs-consommateurs, bande passante, etc.)
- Bases de données (dépendances)
- Bases de connaissances
- Techniques de compilation
- Imagerie numérique (scènes, compression)
- Grammaires de graphes (aspects dynamiques)
- Etc.

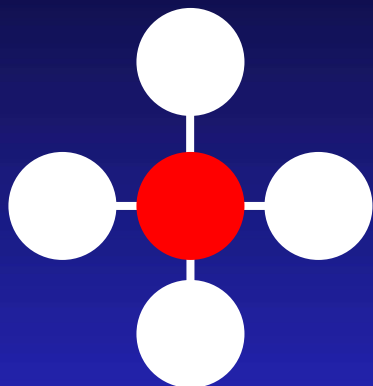
Compression d'images : les quadrees

Codage d'une image par un arbre...

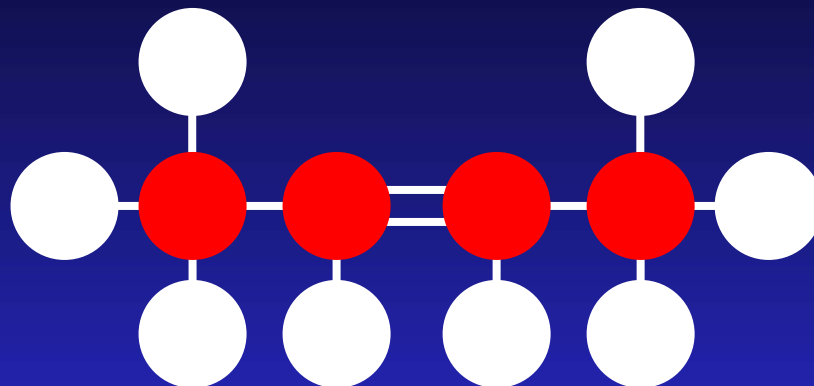


Feuilles = pixels ou « zones uniformes »

Modélisation de molécules



méthane CH_4



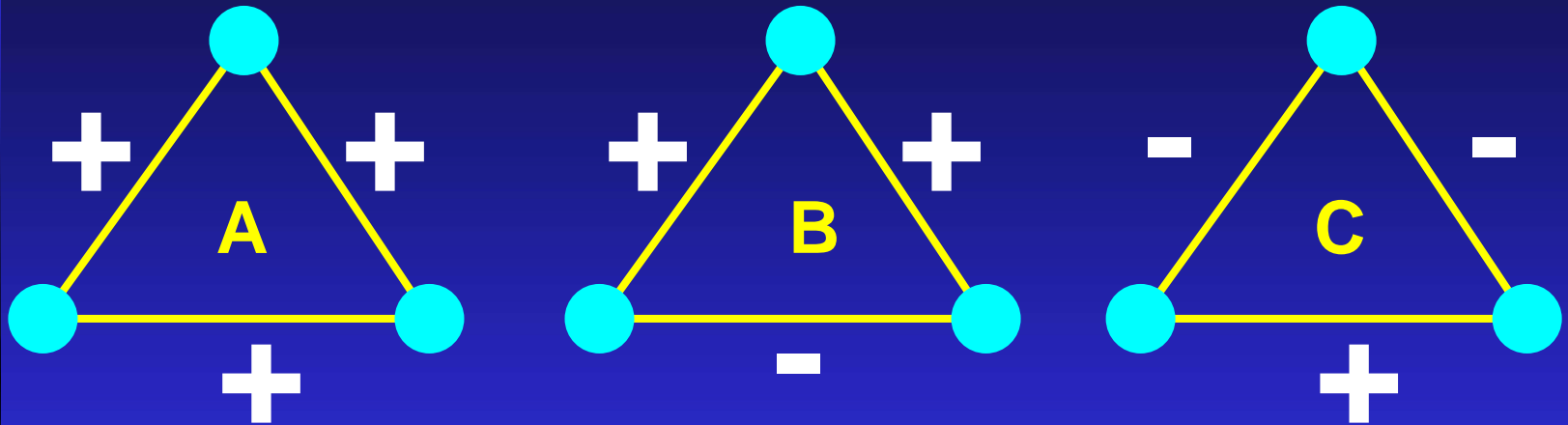
butène C_4H_8

Graphes (multigraphes) avec contraintes sur les degrés des sommets selon le type de sommet...

Cayley [1875]

- *Hydrocarbures saturés $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$: arbres...*
- *Énumération de molécules, d'isomères, classifications, etc.*

Graphes signés (sociogrammes)

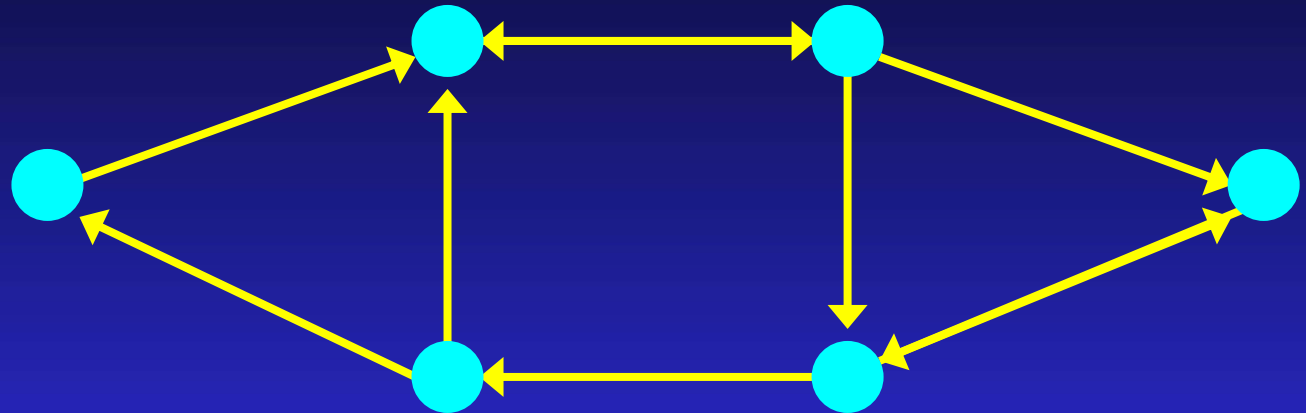


Relation aimer / détester entre employés...

Configurations équilibrées (A,B) ou non (C)

Notions de « clans » (employés, nations, politiciens, etc.), algorithmes de découpage

Pouvoir et influence



Chaque individu a une opinion représentée par un nombre réel (e.g. valeur d'un objet)...

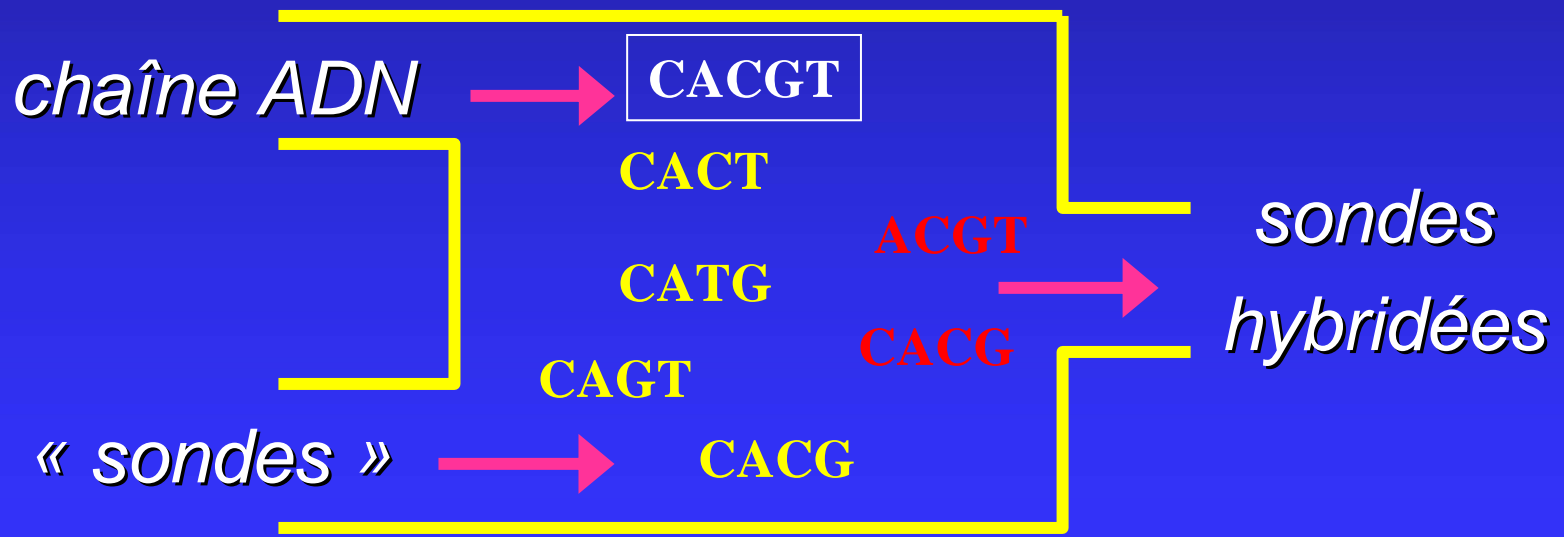
Ces opinions évoluent dans le temps, en fonction des opinions des personnes ayant de l'influence sur l'individu...

- L'opinion de l'individu UNTEL se stabilise-t-elle ?
- Si oui, tend-on vers un consensus ? Vers plusieurs ?
- Qui a réellement de l'influence sur ces consensus ?

Décodage de chaînes d'ADN

Chaîne d'ADN = séquence de nucléotides
A,C,G,T : Adénine, Cytosine, Guanine, Thymine

Séquençage par « hybridation »

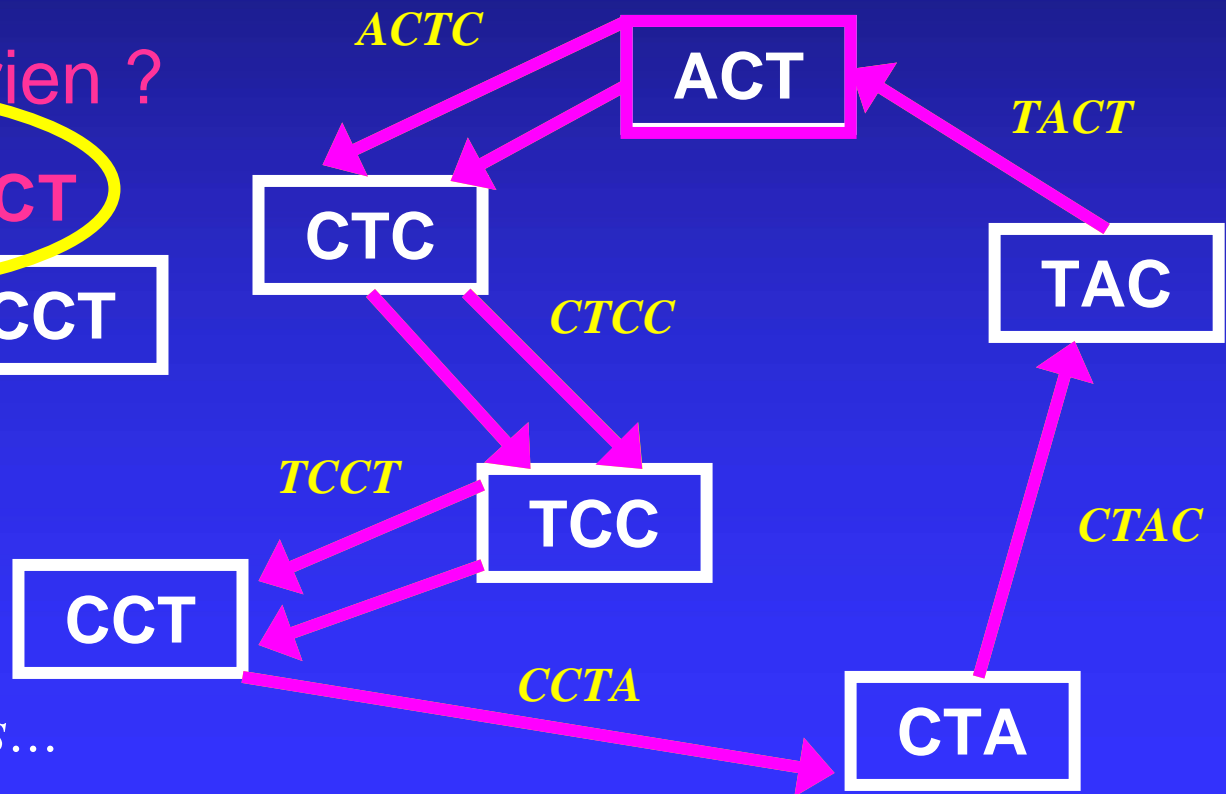
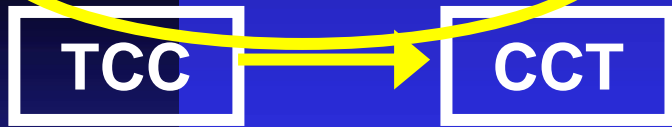


Décodage de chaînes d'ADN

Sondes hybridées : TCCT, ACTC, CTAC, TCCT, ACTC, CTCC, TACT, CCTA, CTCC

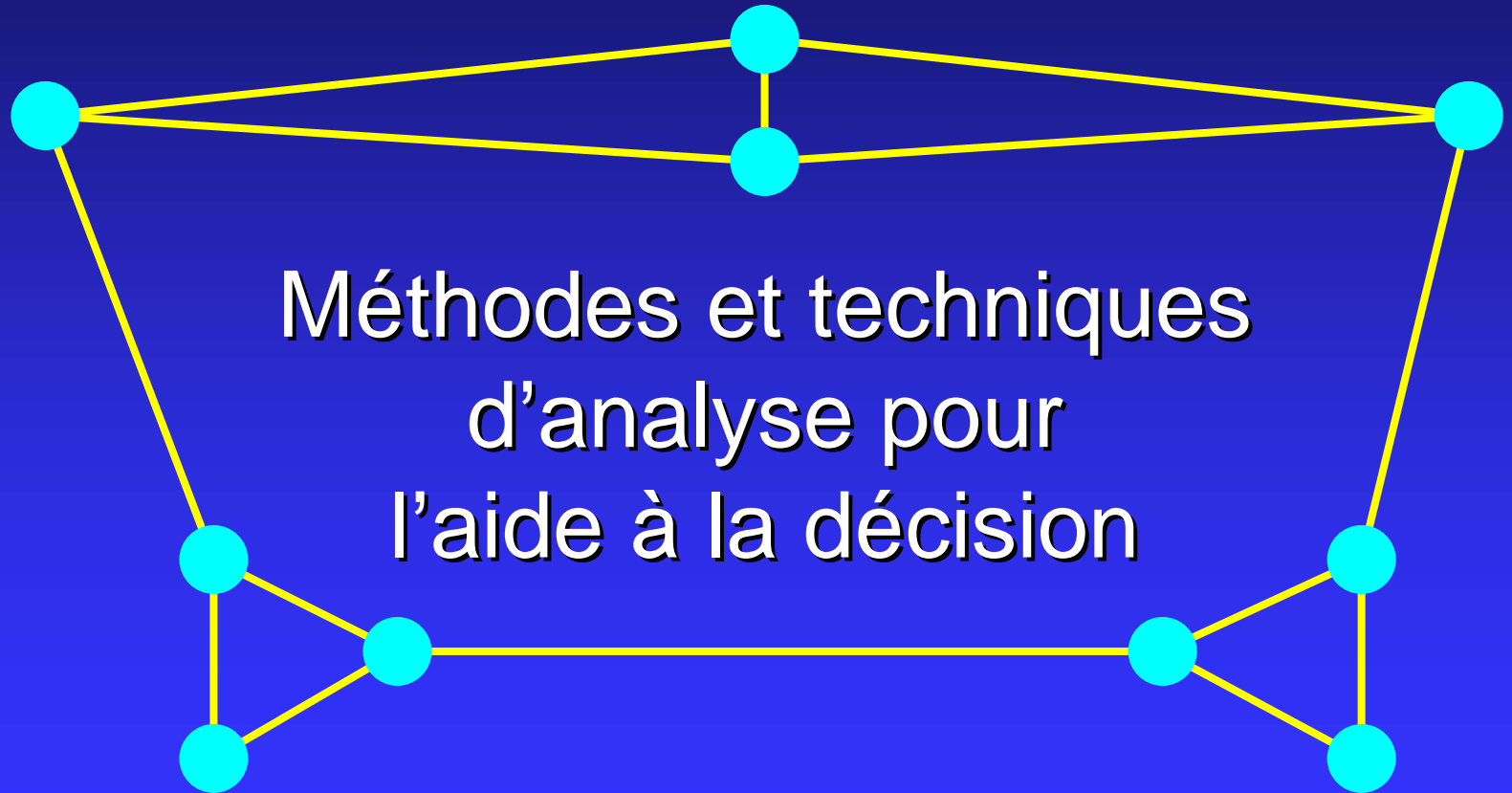
Chemin eulérien ?

TCCT
ACTCCTACTCCT



Problème :
en général,
plusieurs
solutions possibles...

Recherche opérationnelle



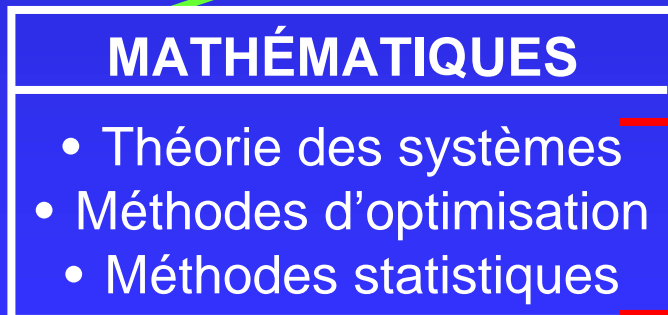
Recherche opérationnelle



Élaboration
du modèle



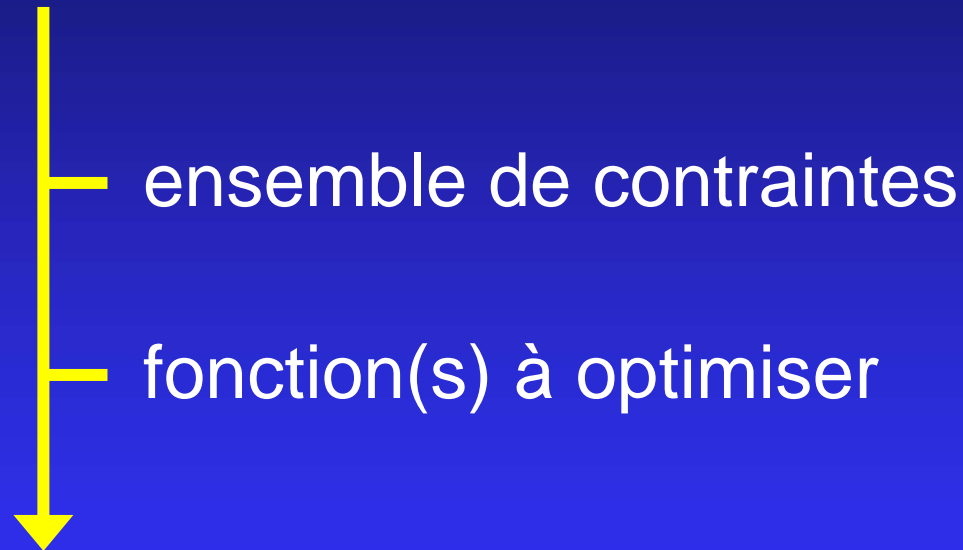
Traitement
du modèle



Théorie des
graphes

Problèmes de recherche opérationnelle

n valeurs à déterminer



solution dans un sous-espace de \mathbb{R}^n

Quelques exemples de problèmes...

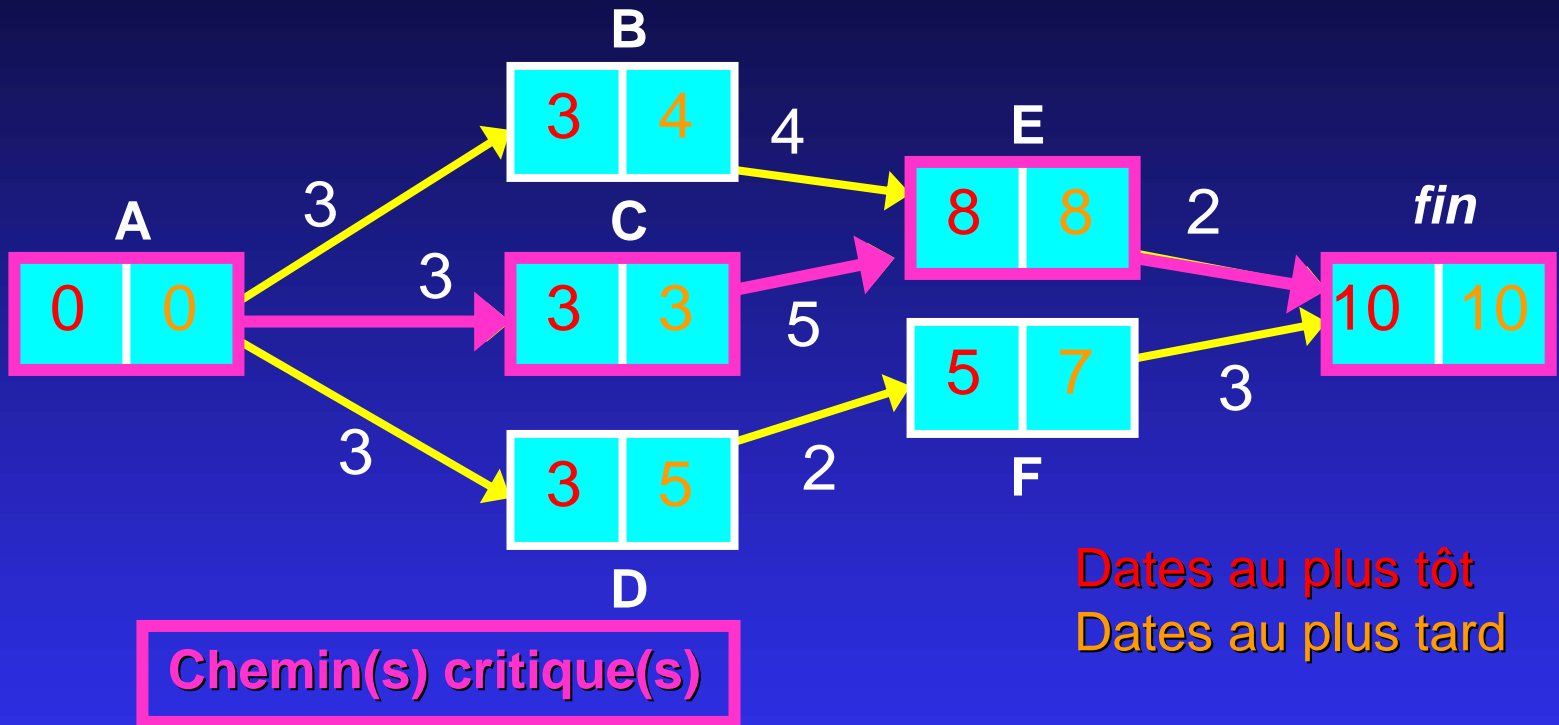
- Problèmes d'ordonnancement
- Problèmes de flot maximal
- Problèmes d'affectation
- Programmes de transport
dépôts de marchandises, clients avec besoins, capacité des canaux illimitée (transformations d'arbres...)
- Problème du voyageur de commerce
visite de villes, avec retour... (chemin hamiltonien de coût minimal)
- Problème du « sac à dos »
 n objets, chaque objet ayant une « utilité », sac de capacité m ...
- Etc.

En pratique...

- Logiciels d'aide à la décision
(boîte à outils de résolution...)
 1. Modéliser les données du problème
 2. Définir les contraintes
 3. Définir la fonction à optimiser
 4. Utiliser les outils de résolution
 5. Décider !...

Économie, commerce, production, transport, etc.

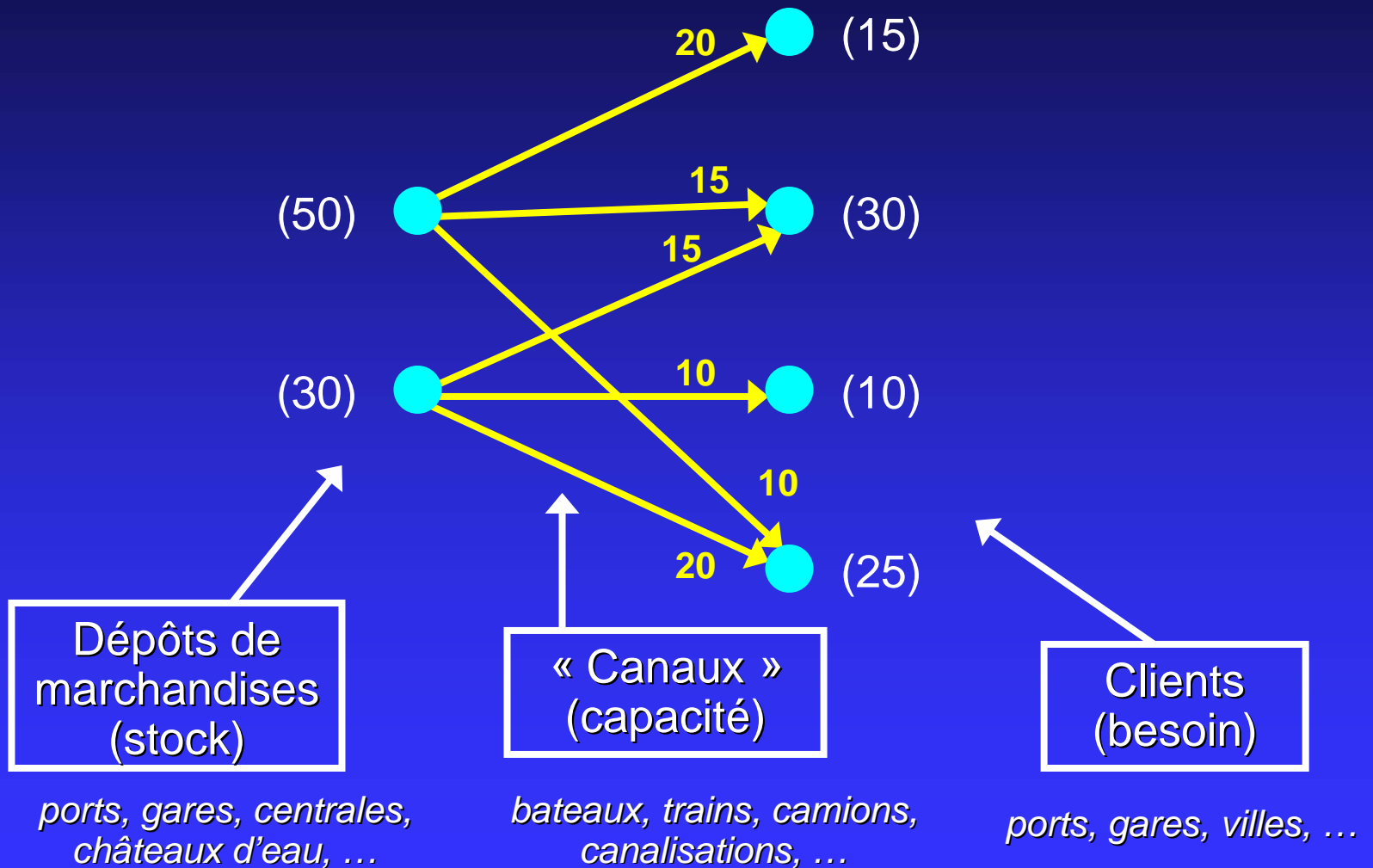
Problèmes d'ordonnancement



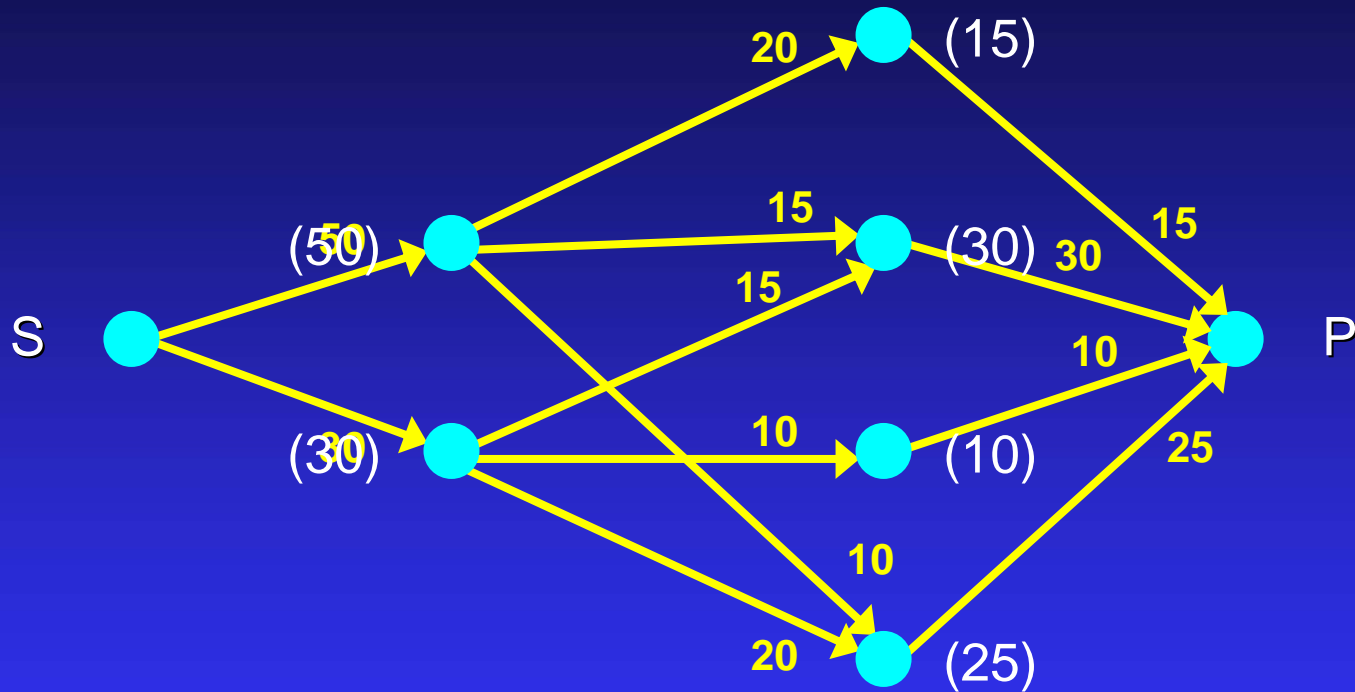
Sommets = tâches à réaliser

Arcs = relation d'antériorité (valuation : durée de la tâche initiale)

Réseaux de transport



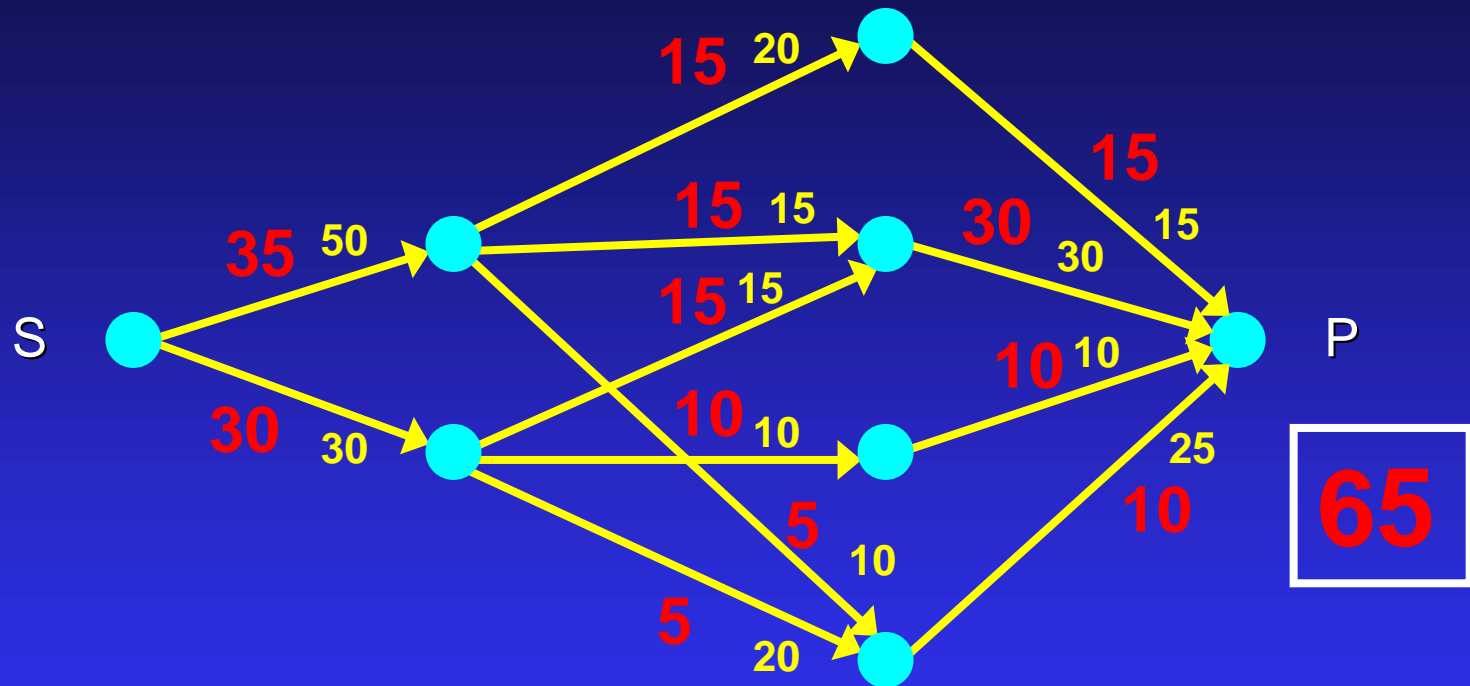
Réseaux de transport



Réseau de transport :

- Un sommet source (S), un sommet puits (P),
- Pour tout sommet u , il existe un chemin de S vers u et un chemin de u vers P

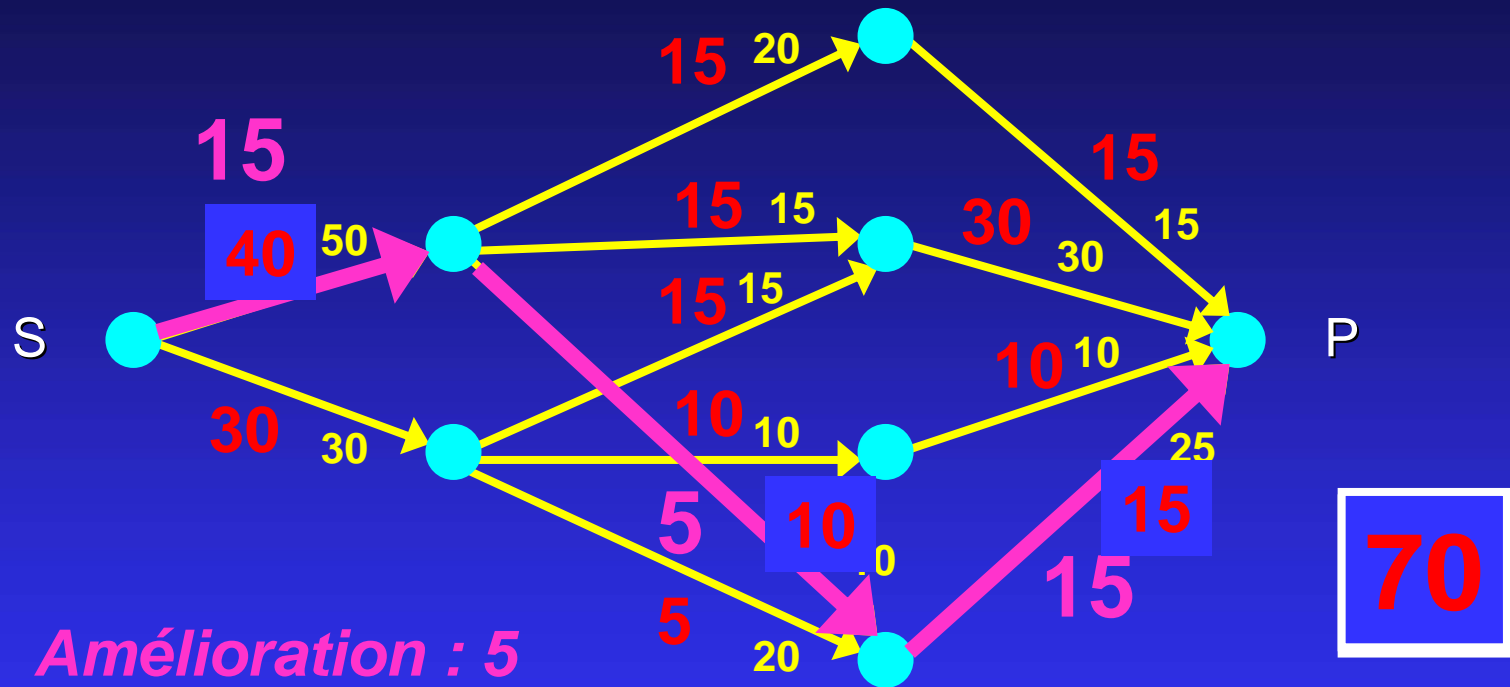
Flot dans un réseau de transport



Flot :

- Pour chaque arc : *valeur* \leq *capacité*
- Pour tout sommet (sauf S et P) :
somme des valeurs entrantes = *somme des valeurs sortantes*

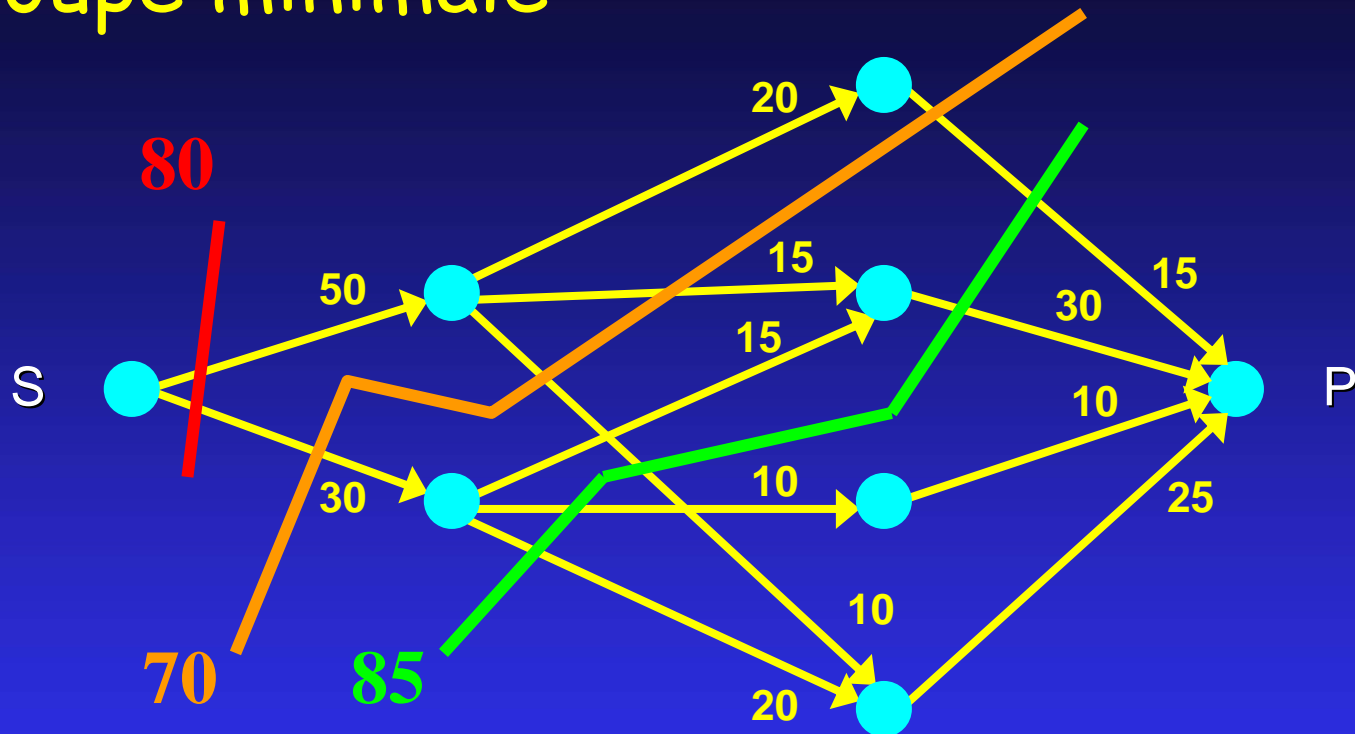
Flot maximal dans un réseau de transport



Flot maximal : pas de « chaîne améliorante »

- Souvent des chaînes « plus complexes », avec retours arrière,
- Possibilité de « coût de transport » sur les arcs...

Coupe minimale



- Une coupe = ensemble d'arcs dont la suppression « sépare » les sommets S et P
- Coupe minimale = coupe dont le poids (somme des poids des arcs la composant) est minimal

Th : Poids d'une coupe minimale = valeur d'un flot maximal

Problèmes d'affectation

Exemple : affectation de 5 postes (a,b,...) à 5 personnes (A,B,...)

Matrice des « préférences »

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

Problème

réaliser l'affectation
en minimisant les
insatisfactions

*Affectation de personnes sur
des machines-outils, de
commandes sur des sites de
production, etc.*

Problèmes d'affectation

Matrice des « préférences »

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5

etc.

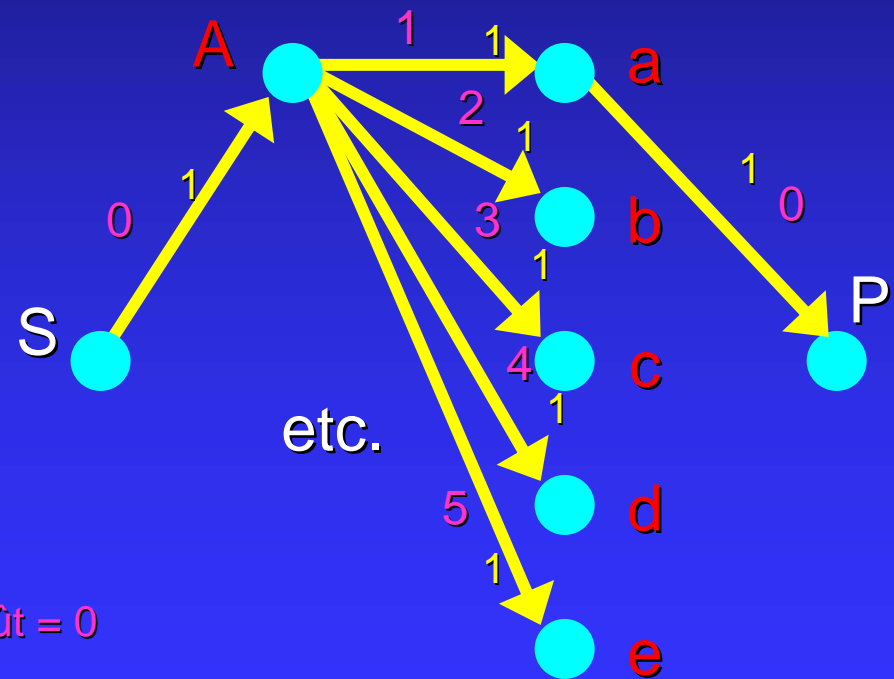
Capacités : 1 partout...

Chaque personne se verra affectée à un poste, chaque poste à une personne

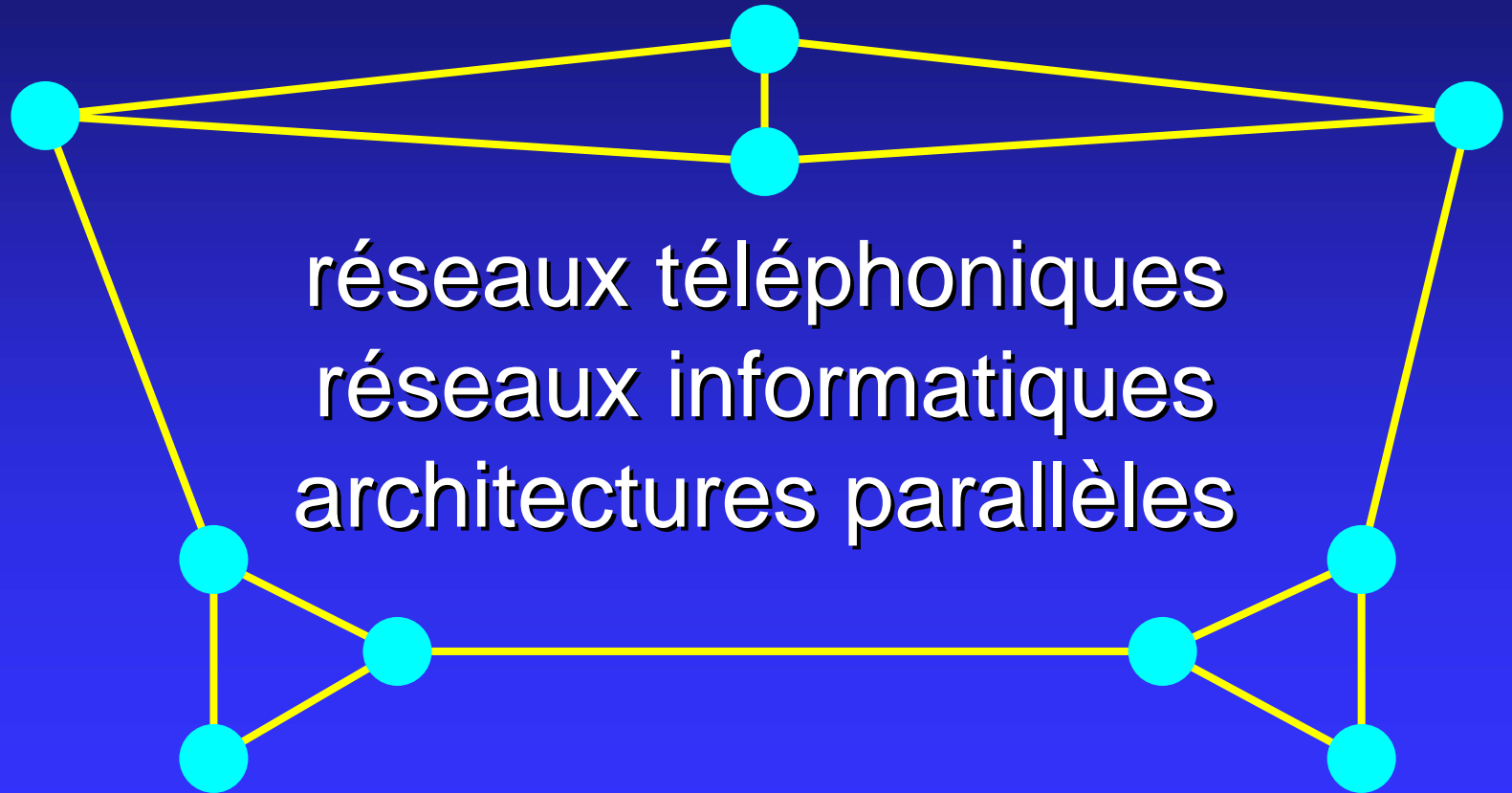
Coût unitaire : matrice...

Sauf sortant de S ou entrant en P : coût = 0

Problème de flot maximal de coût minimal...

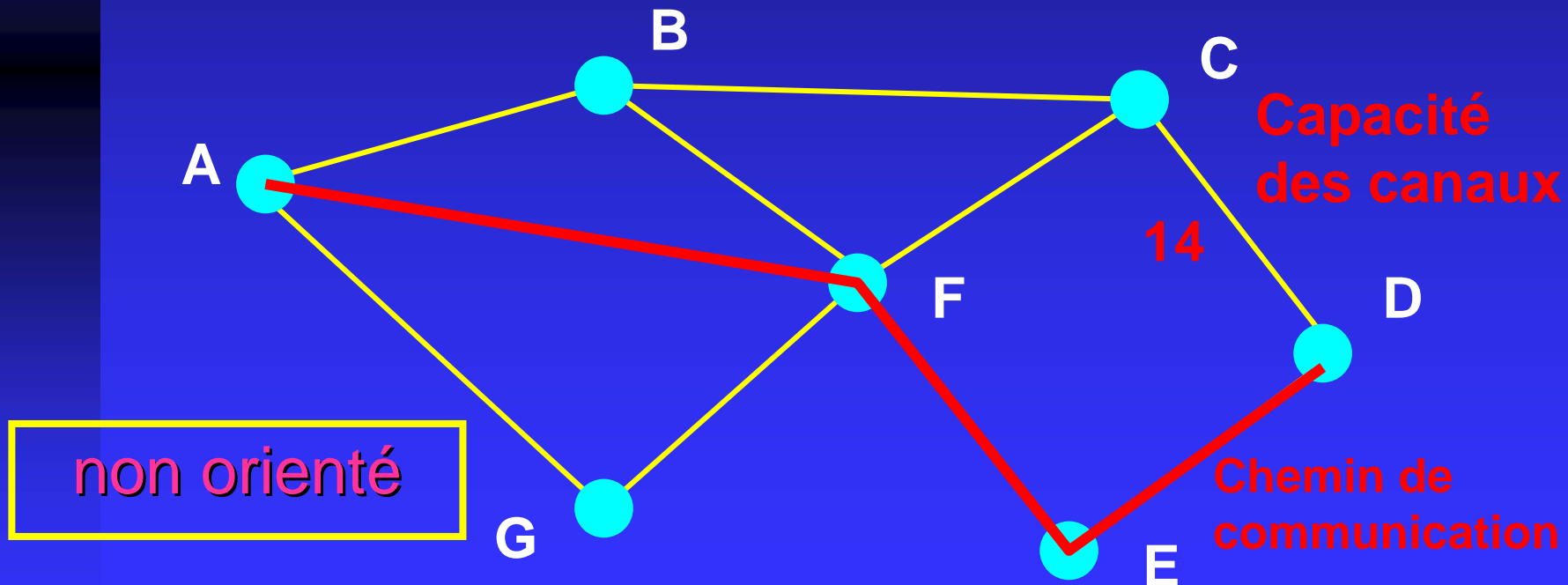


Les réseaux de communication



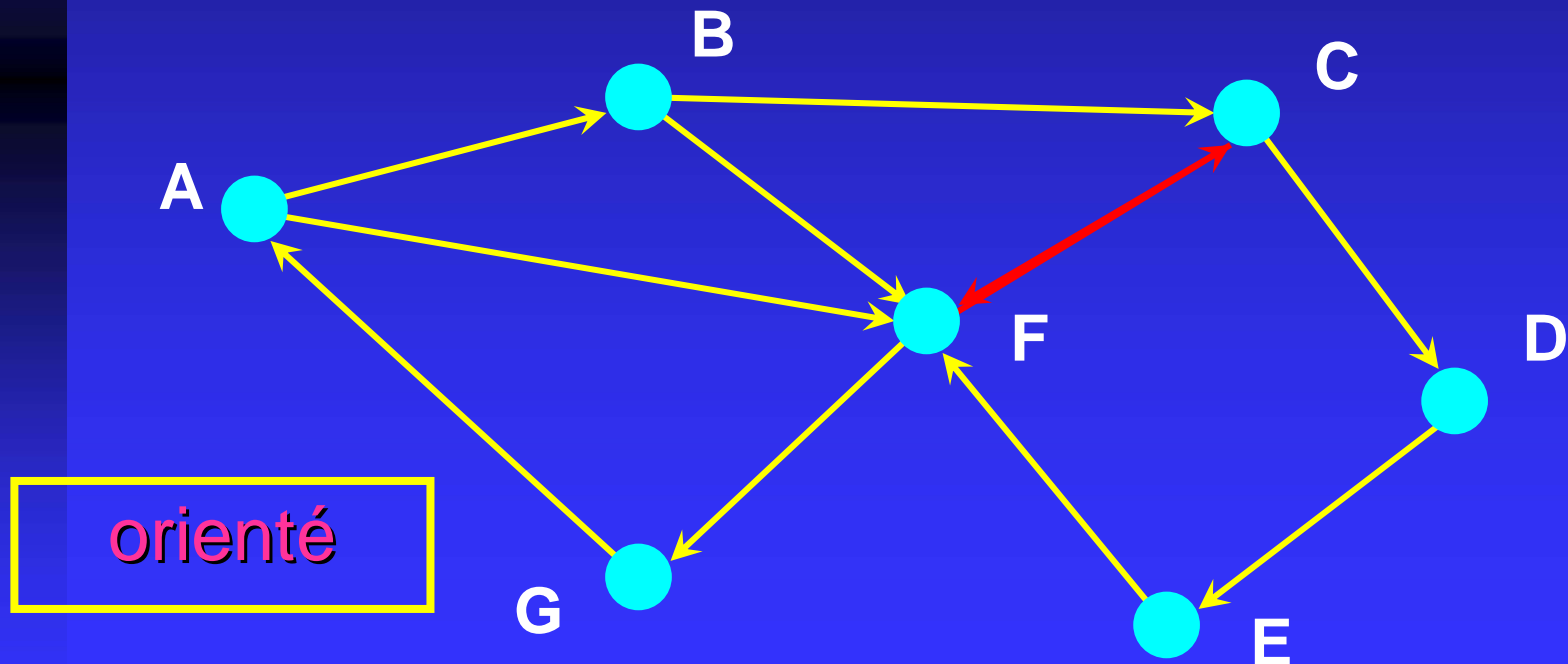
Modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc. \longrightarrow sommets
canaux de communication \longrightarrow arcs, arêtes



Modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc. \longrightarrow sommets
canaux de communication \longrightarrow arcs, arêtes



Quelques applications...

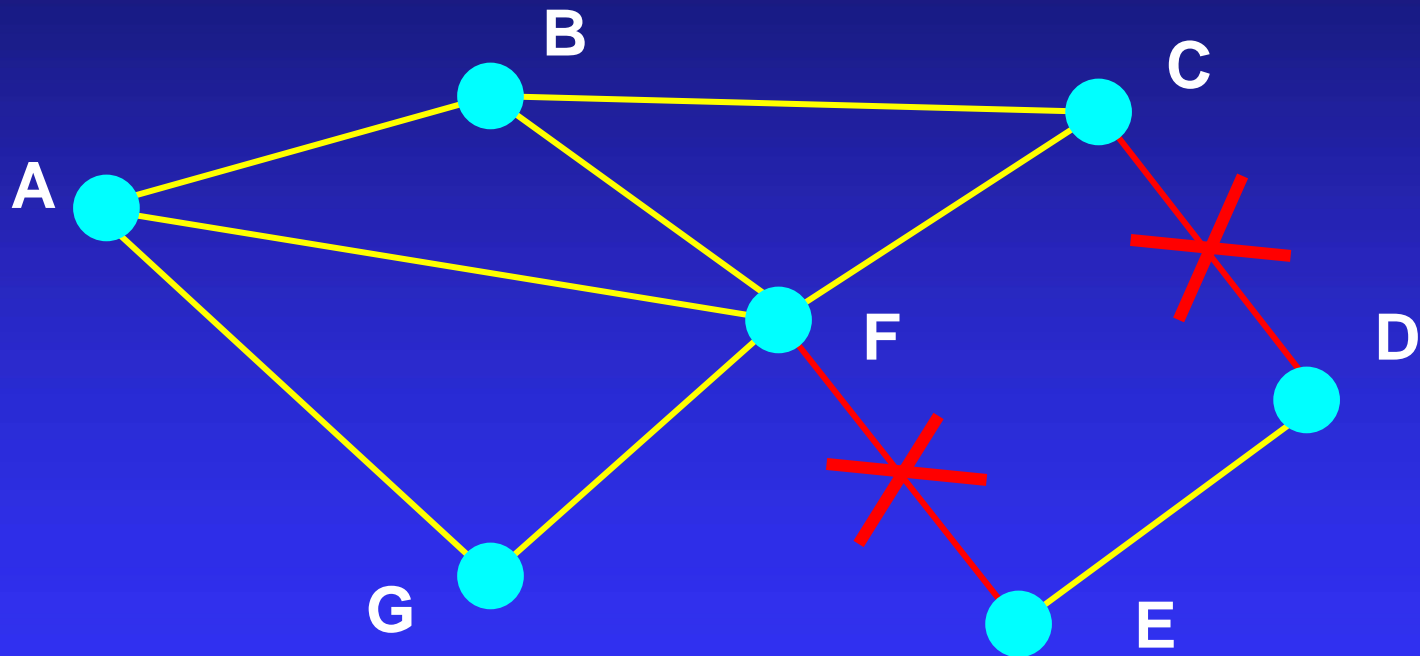
- Mesure de paramètres
 - ◆ fiabilité
 - ◆ charge
- Algorithmes de communication
 - ◆ diffusion de message
 - ◆ routage de messages

Logiciels...

- calcul de différents paramètres (mesures),
- comparaison de différentes topologies (statique),
- détermination de chemins optimaux (dynamique),
- aide à la conception de réseaux...

Fiabilité du réseau

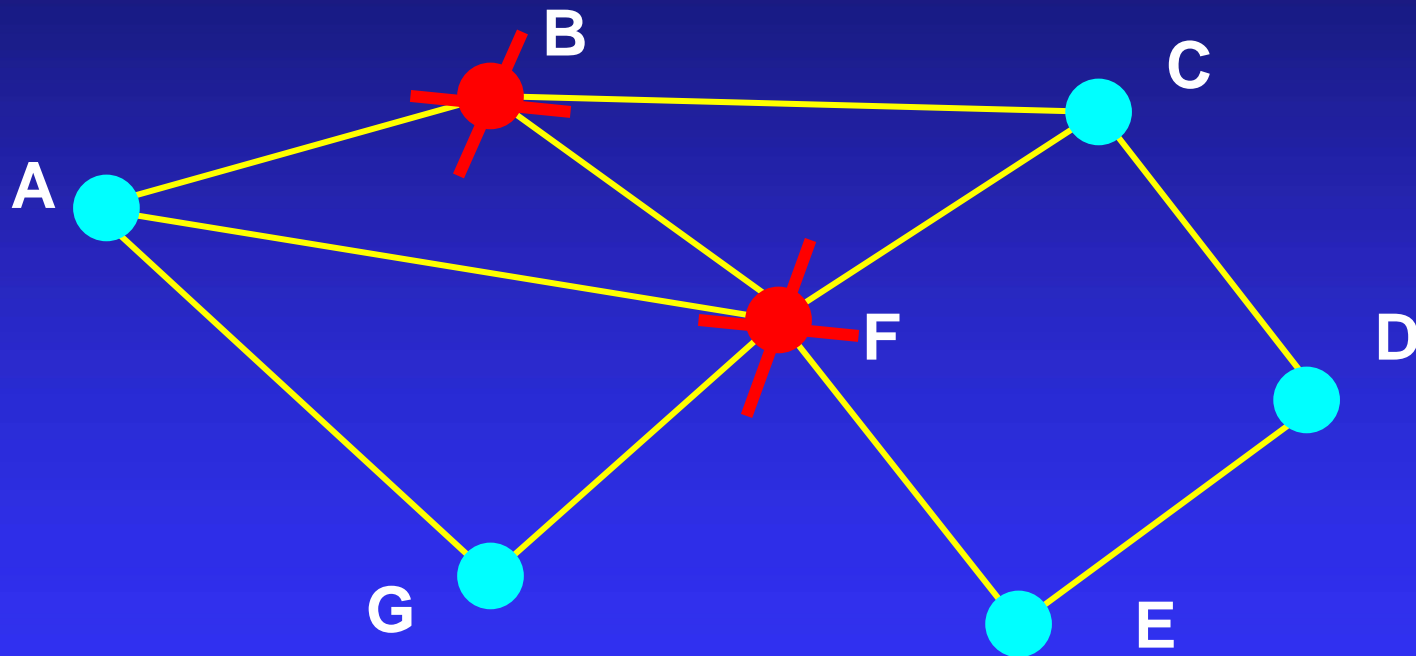
panne des canaux de communication



ensemble d'arêtes déconnectant le graphe

Fiabilité du réseau

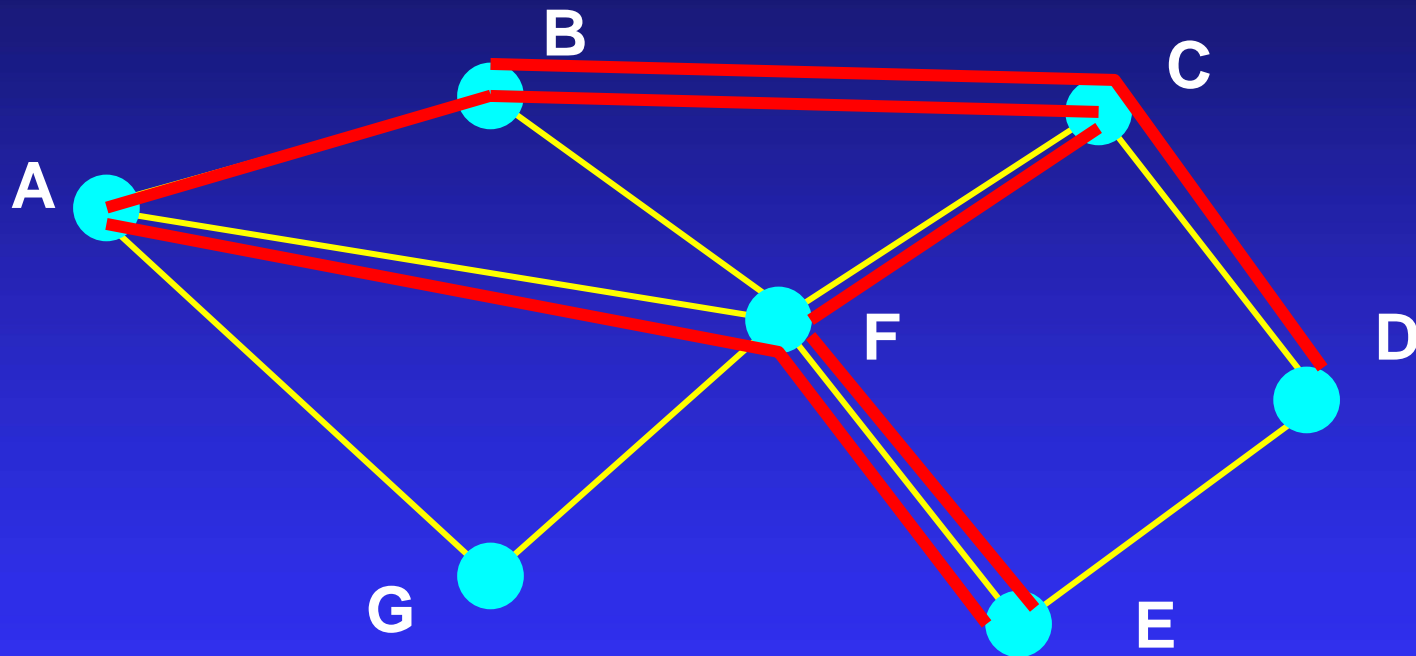
panne des « sommets relais »



ensemble de sommets déconnectant le graphe

Charge du réseau

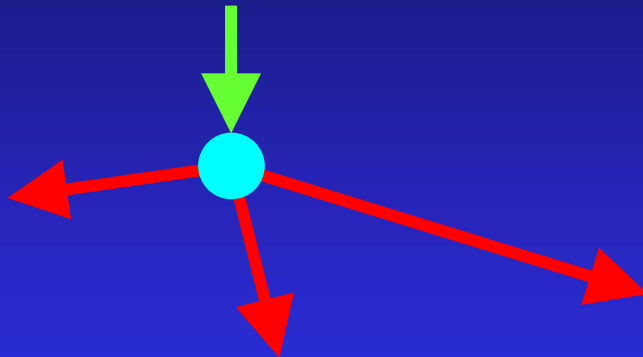
Communications A-C, B-D, A-E, F-C, F-E...



Minimiser la charge des canaux
choix de chemins, contraintes de capacité, ...

Diffusion d'informations

A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...



Algorithme 1

Lorsqu'un sommet reçoit l'information pour la première fois, il la diffuse à ses autres voisins...

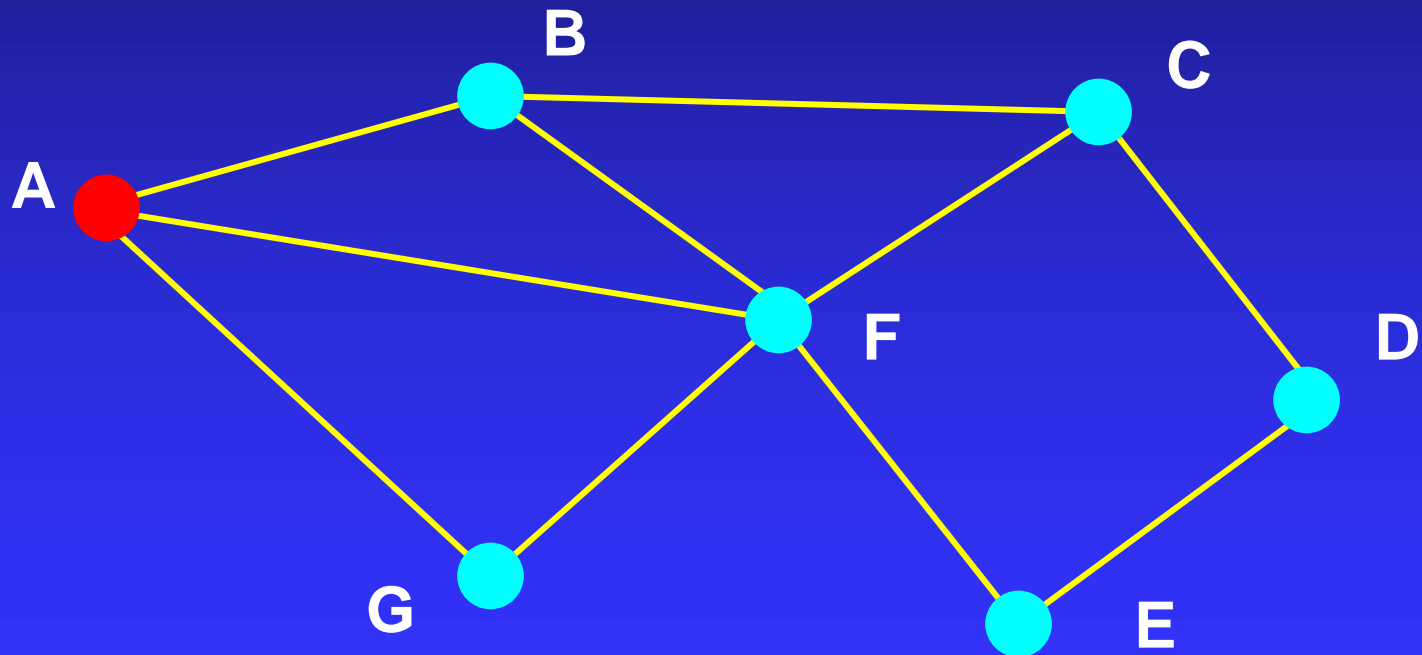
Mesures :

- nombre de messages transmis (charge)
- nombre d'étapes (temps)

Exemple...

messages : 0

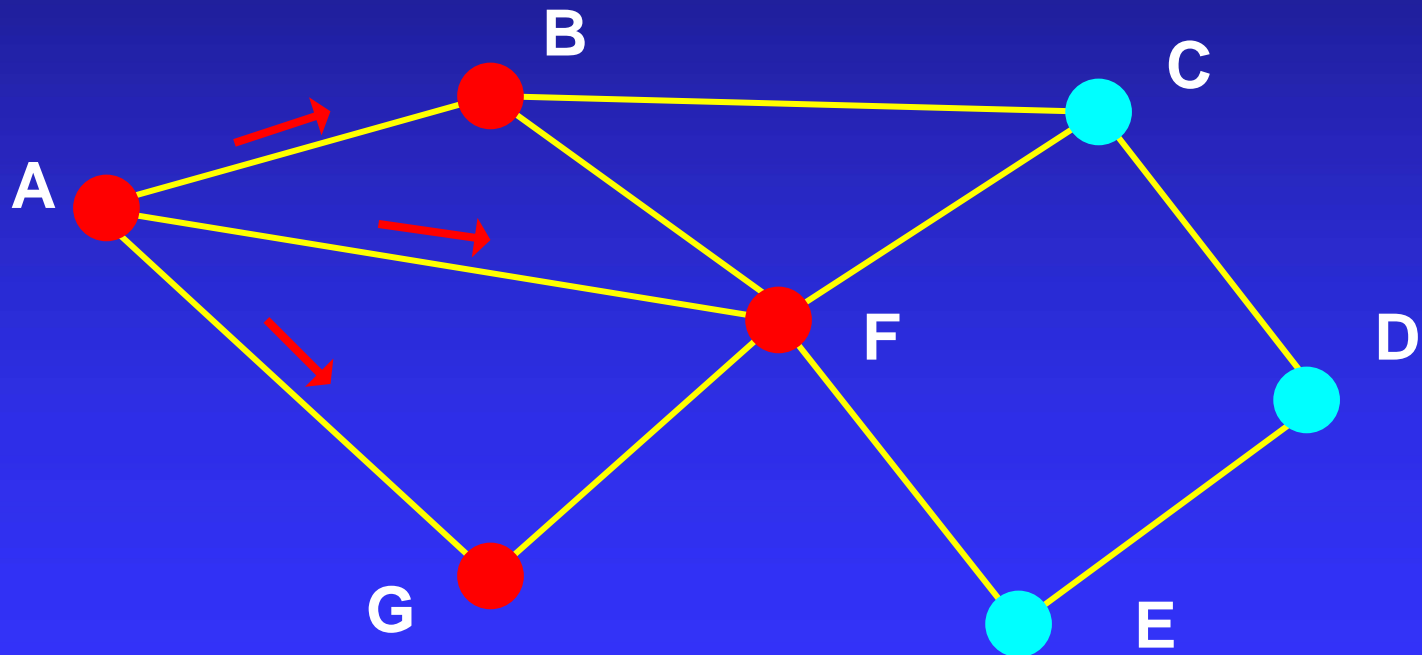
étapes : 0



Exemple...

messages : 3

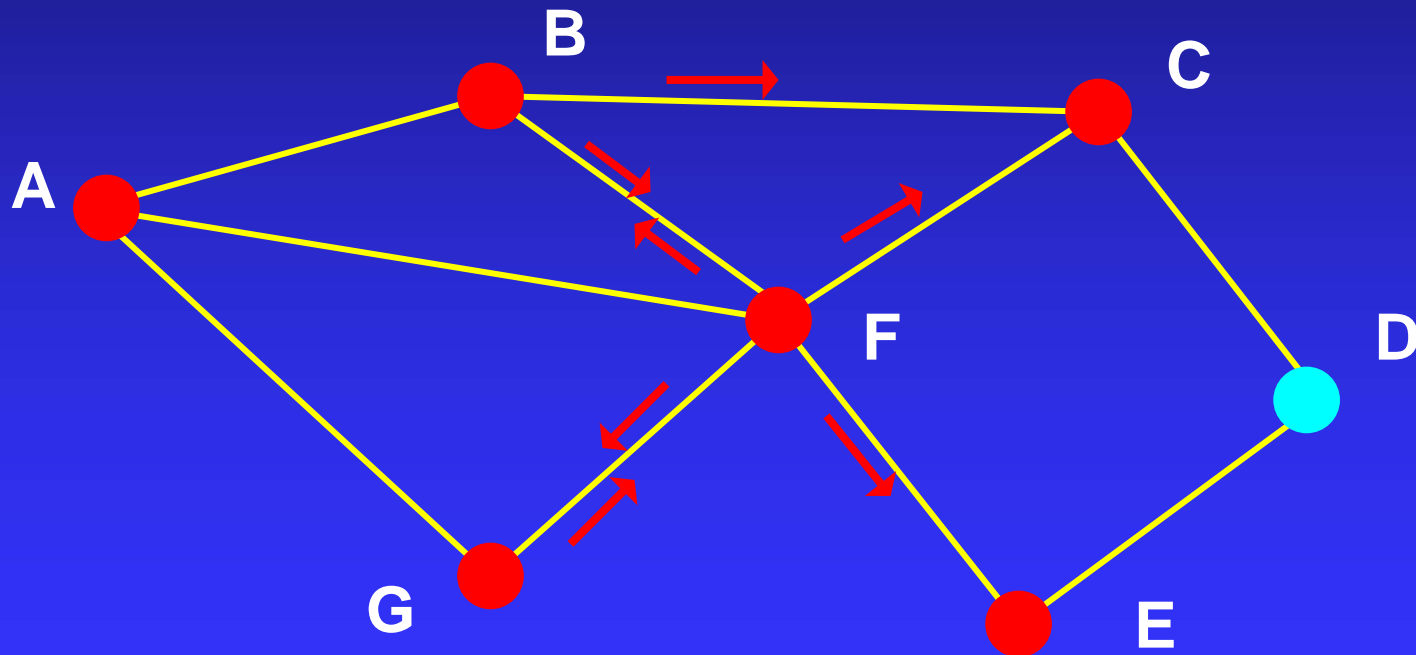
étapes : 1



Exemple...

messages : 10

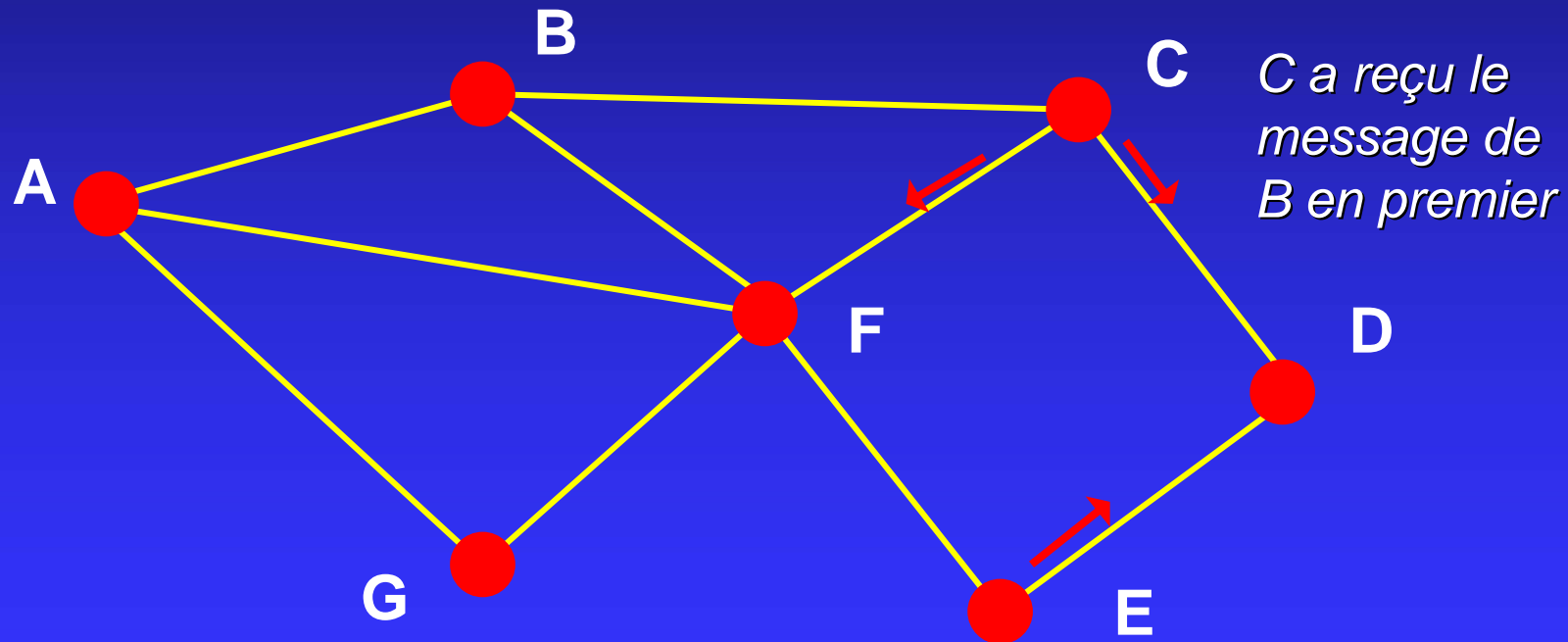
étapes : 2



Exemple...

messages : 13

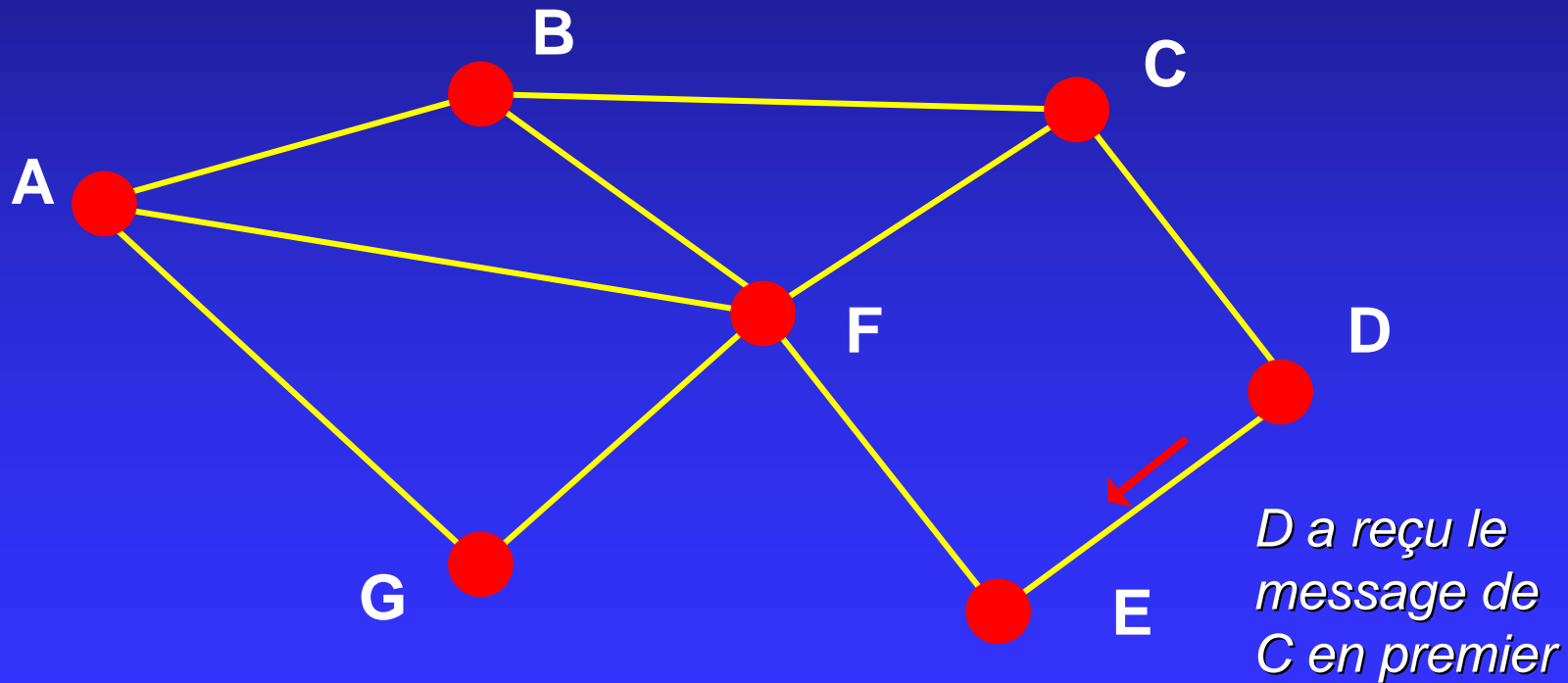
étapes : 3



Exemple...

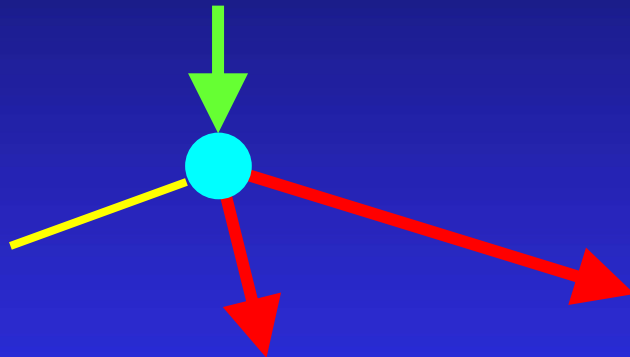
messages : 14

étapes : 4



Diffusion d'informations

A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...



Algorithme 2

Idem algorithme 1, mais en utilisant les arêtes d'un arbre recouvrant...

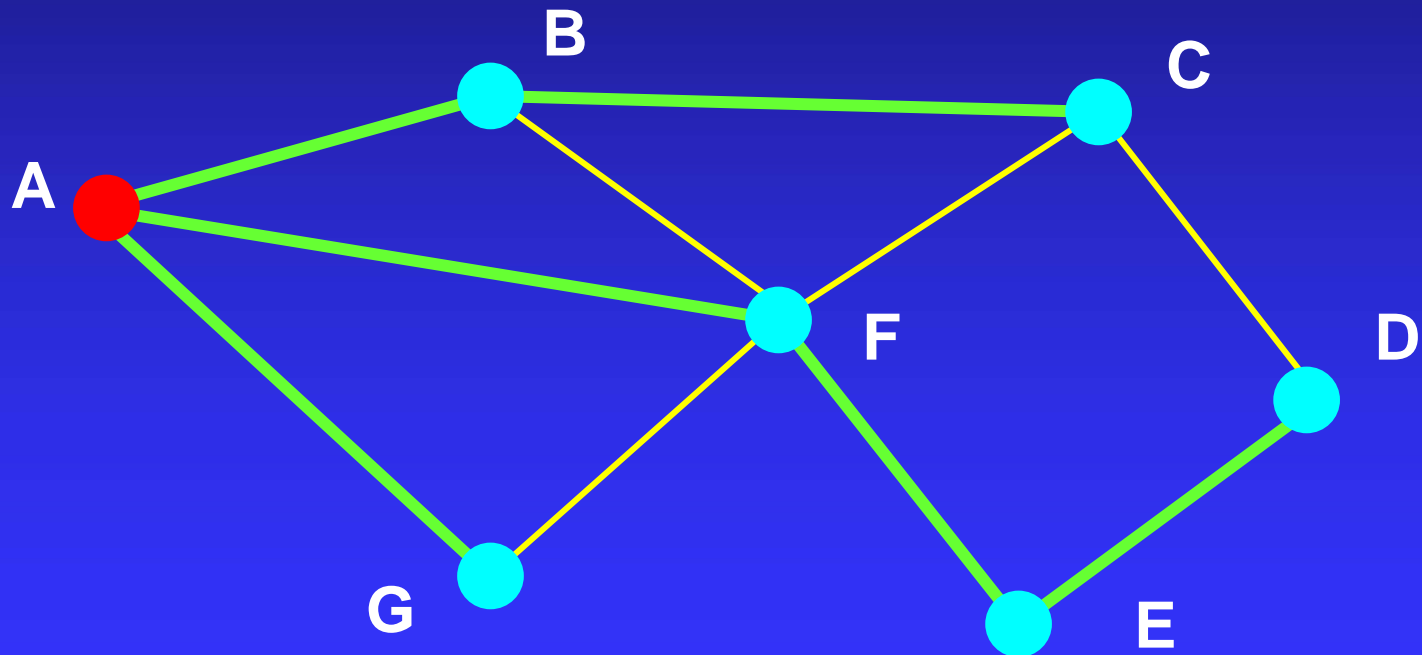
Mesures :

- nombre de messages transmis (charge)
- nombre d'étapes (temps)

Exemple...

messages : 0

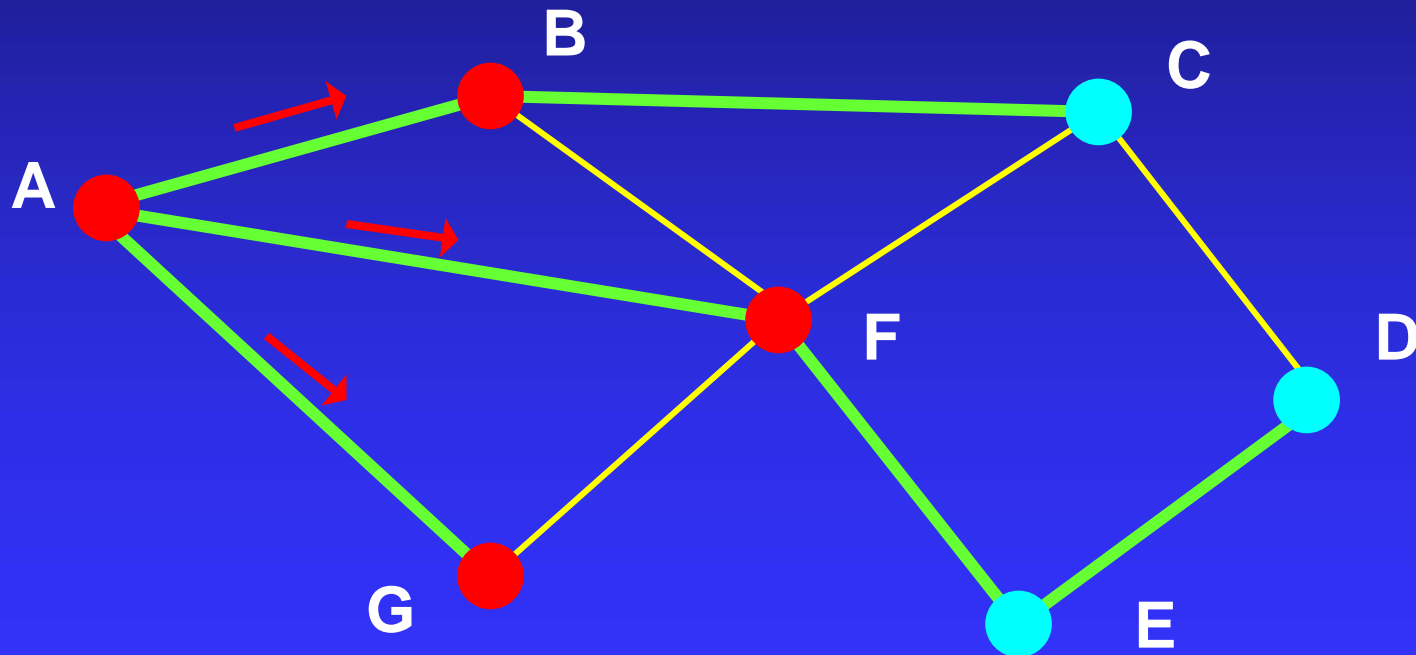
étapes : 0



Exemple...

messages : 3

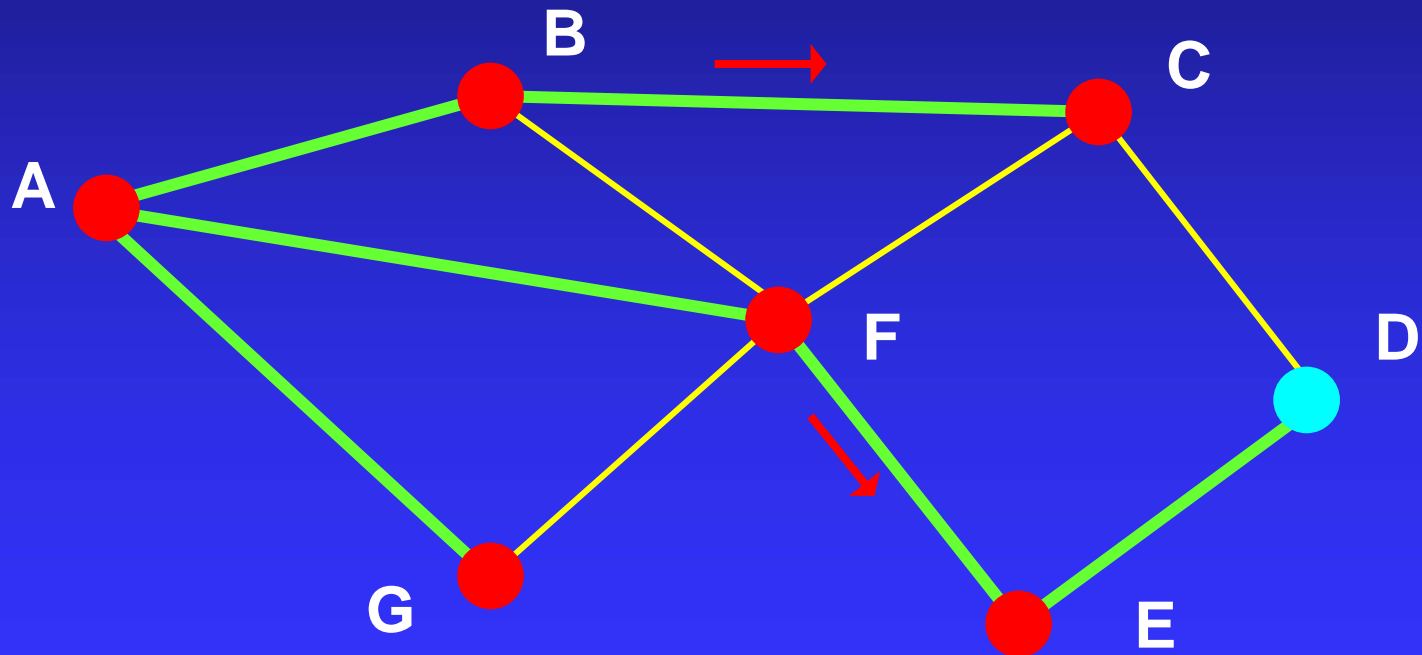
étapes : 1



Exemple...

messages : 5

étapes : 2



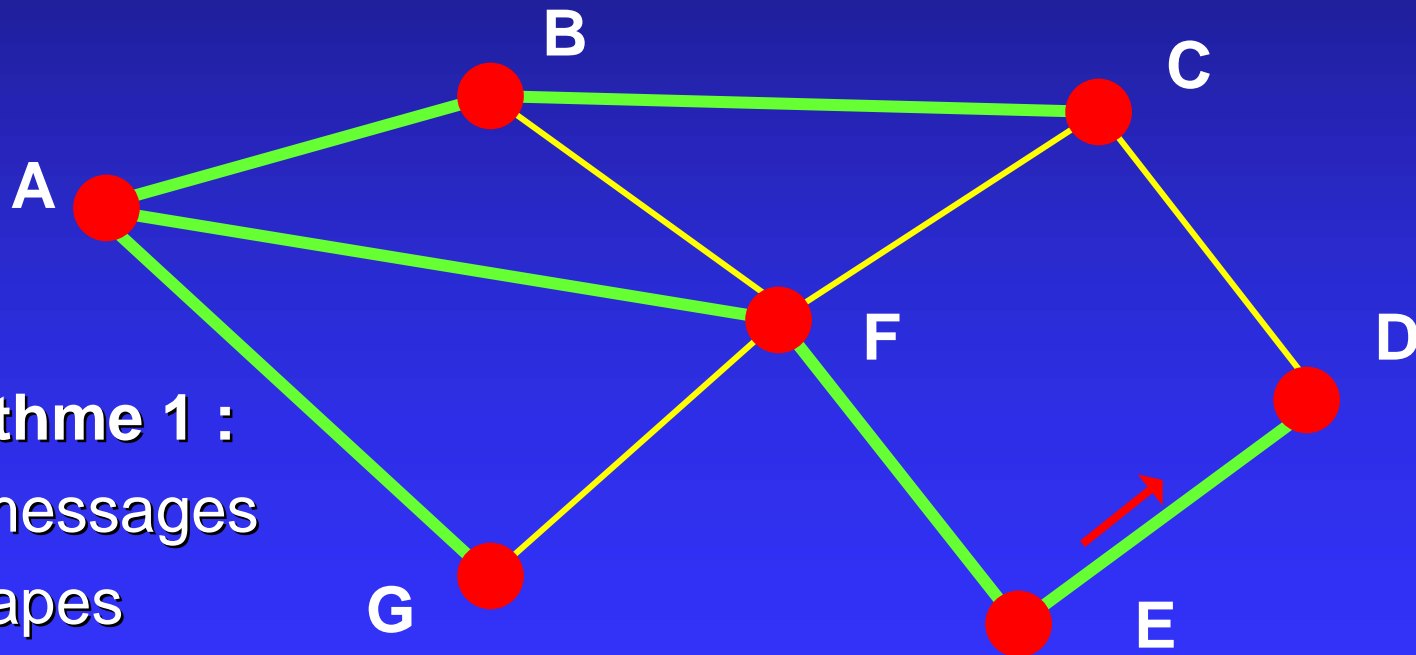
Exemple...

optimal (6 sommets à informer)

profondeur de l'arbre

messages : 6

étapes : 3

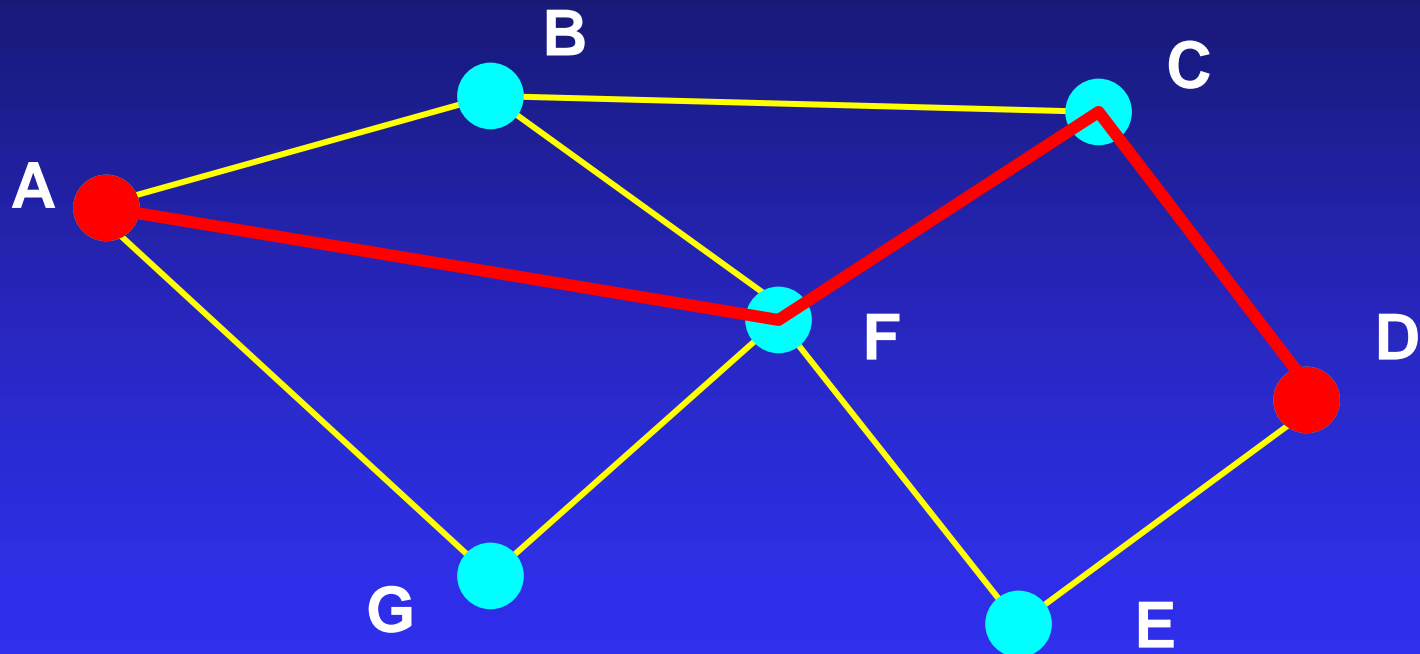


Algorithme 1 :

- 14 messages
- 4 étapes

Routage dans les réseaux

A communique avec D via un chemin (route)



Un routage est un ensemble de $N(N-1)$ routes...

Routage dans les réseaux

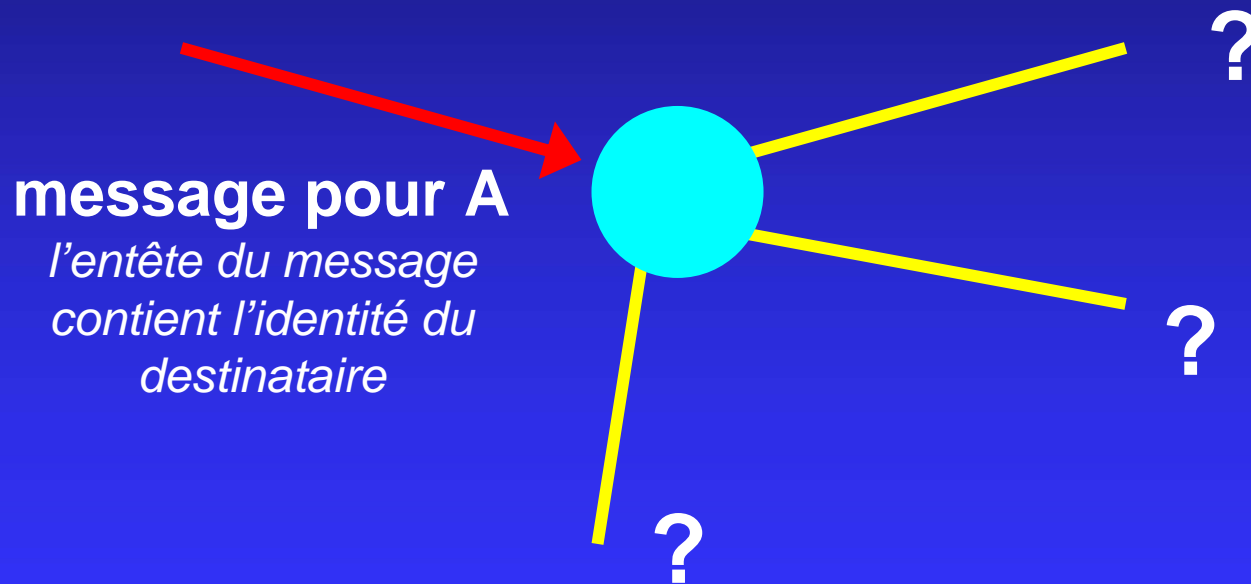
Algorithmes pour calculer un routage :

- minimisant la charge des sommets,
- minimisant la charge des arêtes,
- « raisonnable » en longueur de chemins (dilatation).

réseaux classiques, machines parallèles (communications entre processeurs), réseaux optiques, etc.

Mise en œuvre du routage

Algorithmes de routage



Mise en œuvre du routage

Solution 1 : tables de routage

Chaque sommet possède sa propre table de routage...

message pour...	sortie
A	1
B	3
C	1
etc.	etc.

Coûteux en place mémoire...

Mise en œuvre du routage

Solution 2 : routage par intervalles

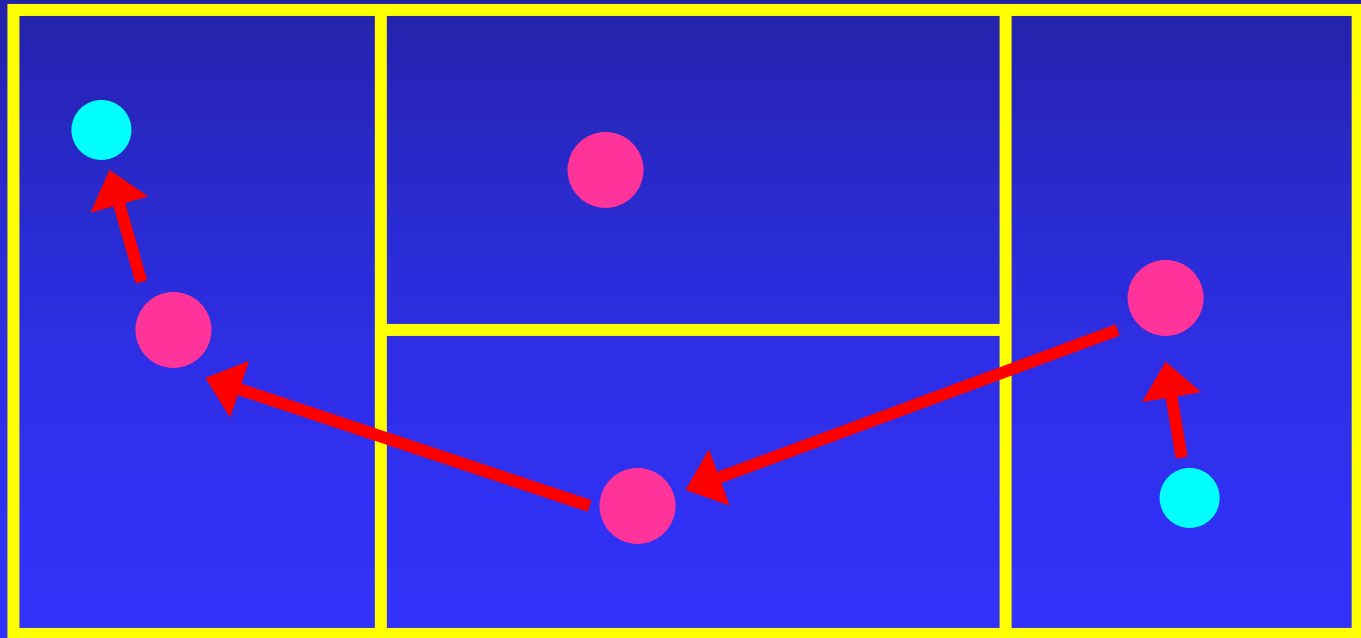
Chaque sommet possède sa propre table de routage...

message pour...	sortie
[1,8]	1
[9,26]	3
[27,32]	2

1. Trouver une « bonne » numérotation des sommets,
2. Trouver un « bon » routage (dilatation).

Hiérarchisation des sommets

- Graphe découpé en régions
- Chaque région possède une « capitale »
- Communications via les capitales



Hiérarchisation des sommets

- Graphe découpé en régions
- Chaque région possède une « capitale »
- Communications via les capitales

Table de routage **CAPITALE**

sa région + réseau des capitales

Table de routage **VILLE**

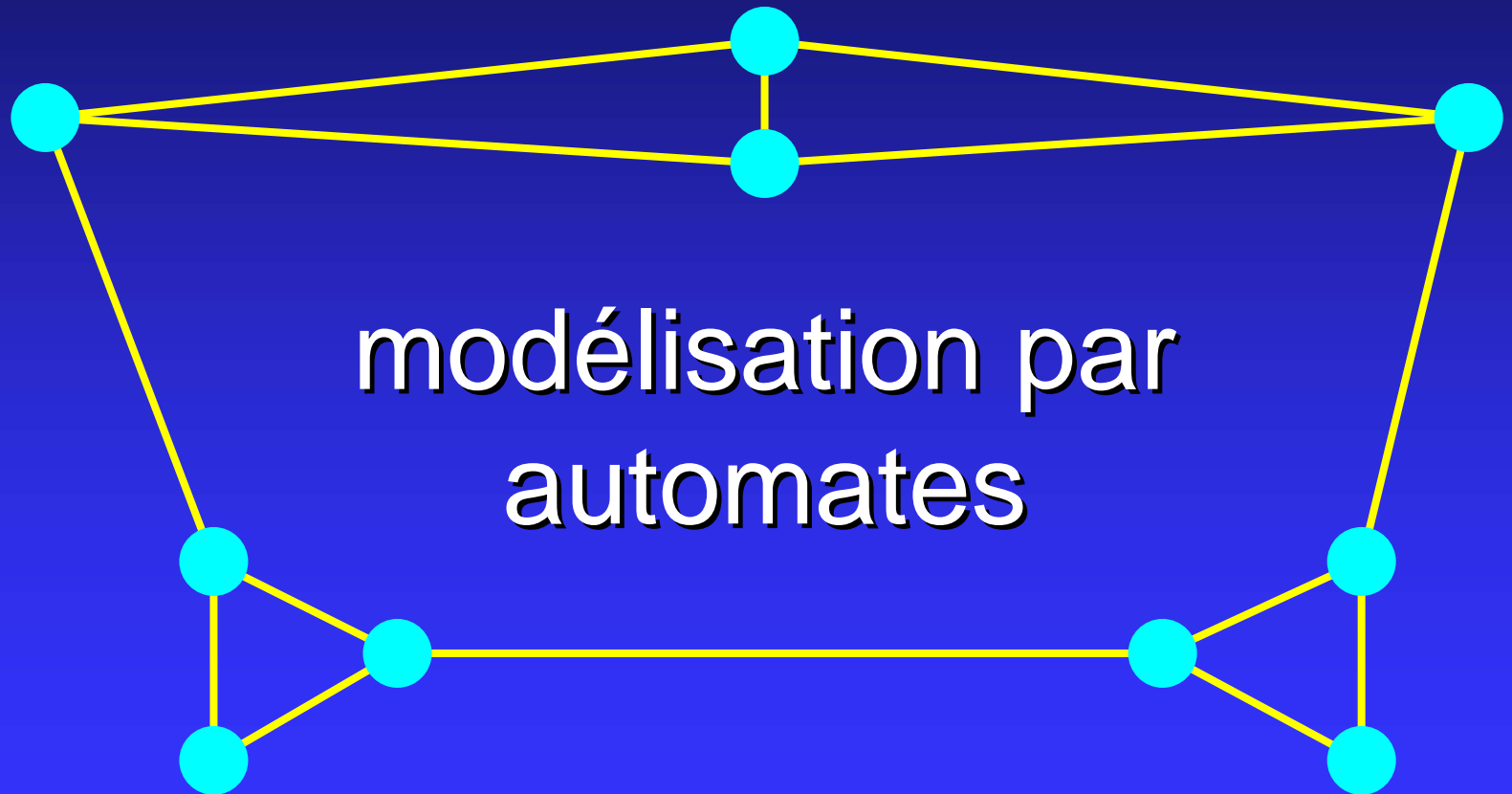
sa région

Possibilité de hiérarchies à plusieurs niveaux...

Routage dynamique (adaptatif)

- Les « paires communicantes » évoluent dans le temps...
- Le réseau évolue...
 - *Machines parallèles,*
 - *Téléphonie mobile...*
Contraintes sur le nombre de chemins empruntant une arête (fréquences)

Fonctionnement de systèmes



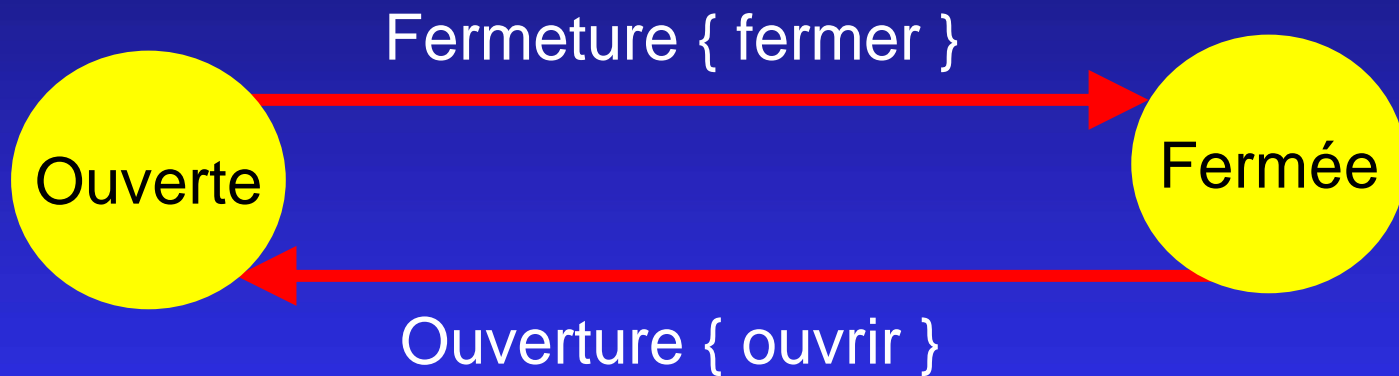
Modélisation par un automate



Les événements déclenchent des actions (réactions) du système selon l'état dans lequel celui-ci se trouve...

Automate déterministe : pour chaque état, au plus une transition par événement...

Exemple 1 : une porte...

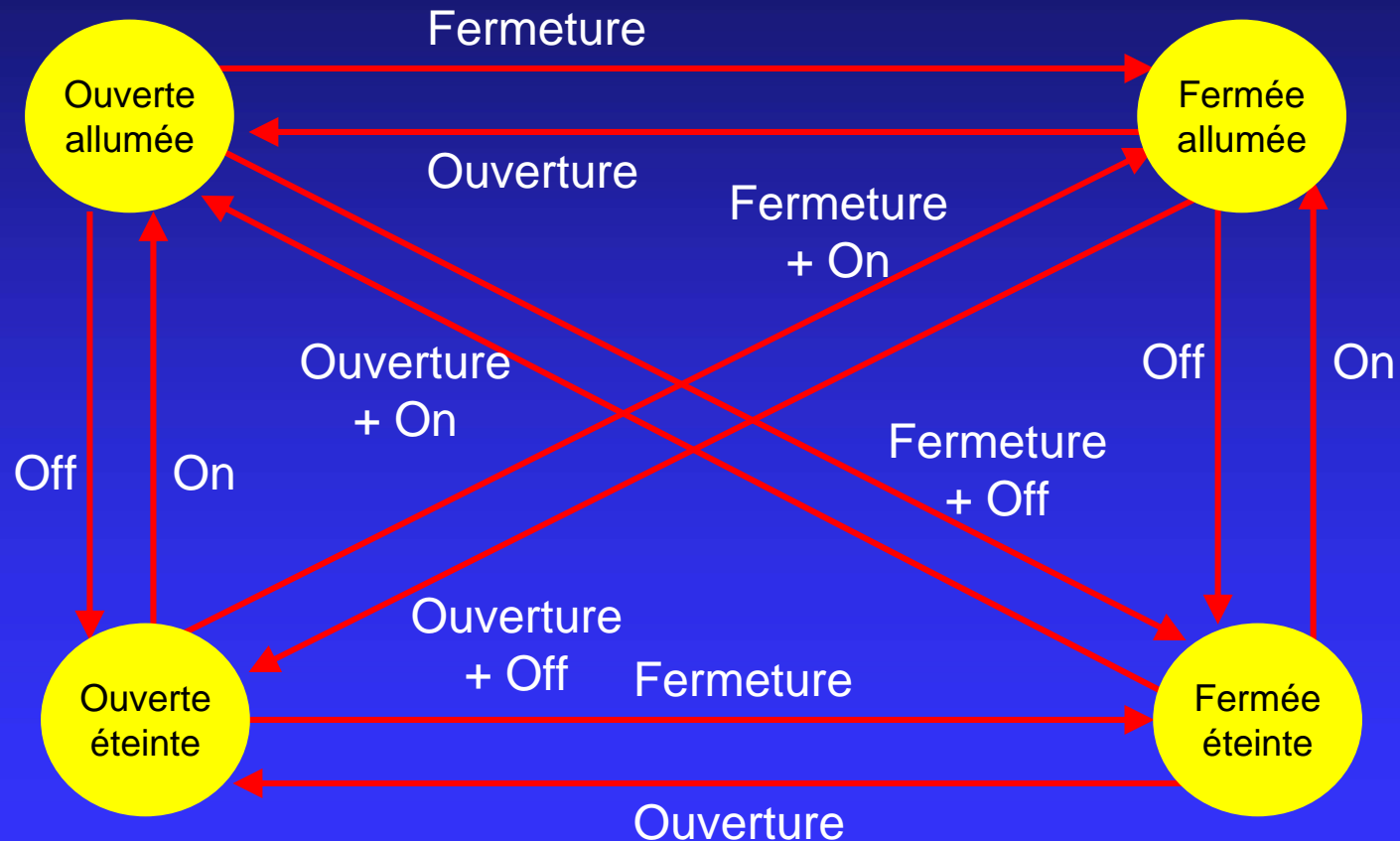


Exemple 2 : une ampoule...



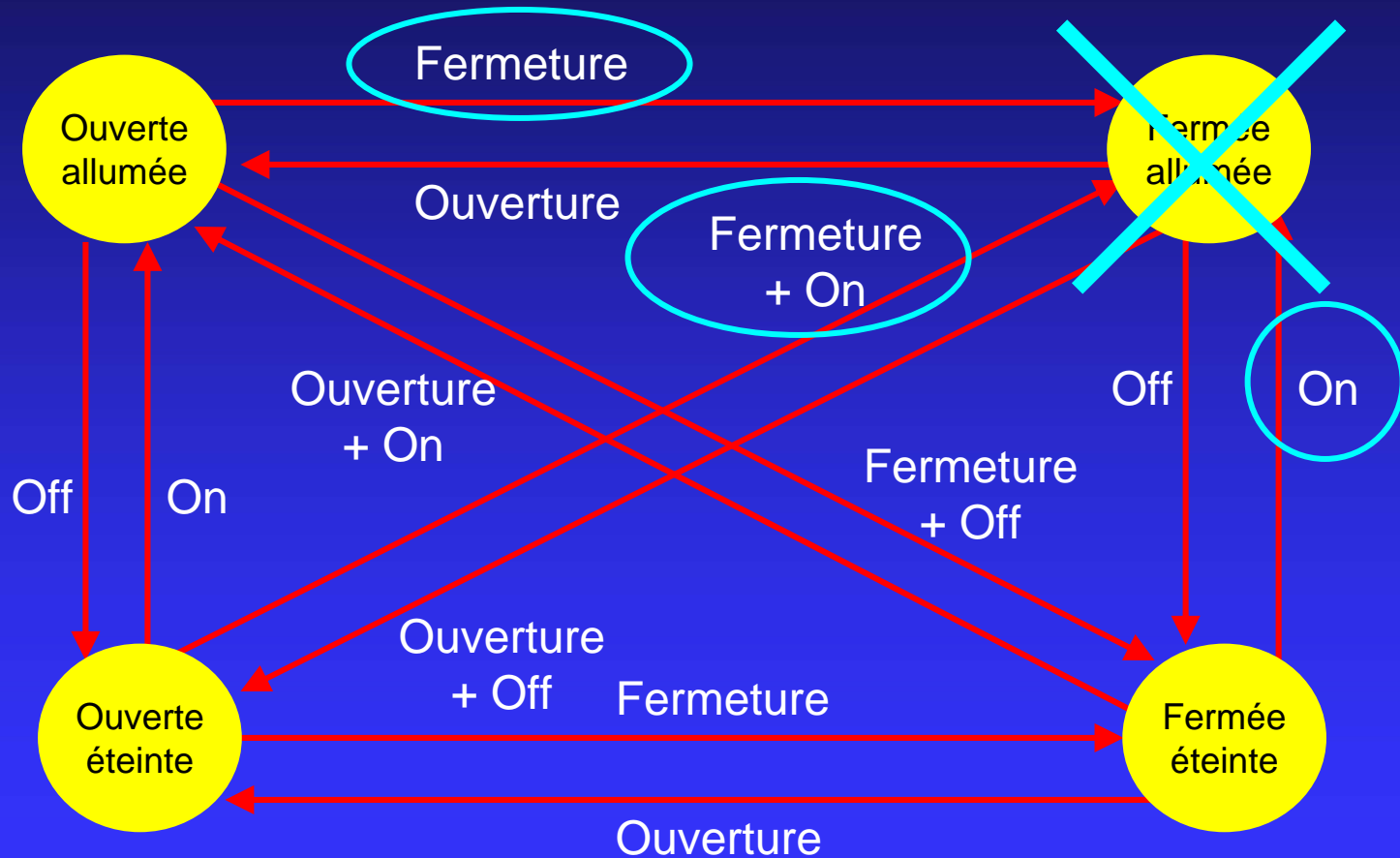
Produit d'automates

Exemple 1 : une pièce d'habitation...



Produit d'automates

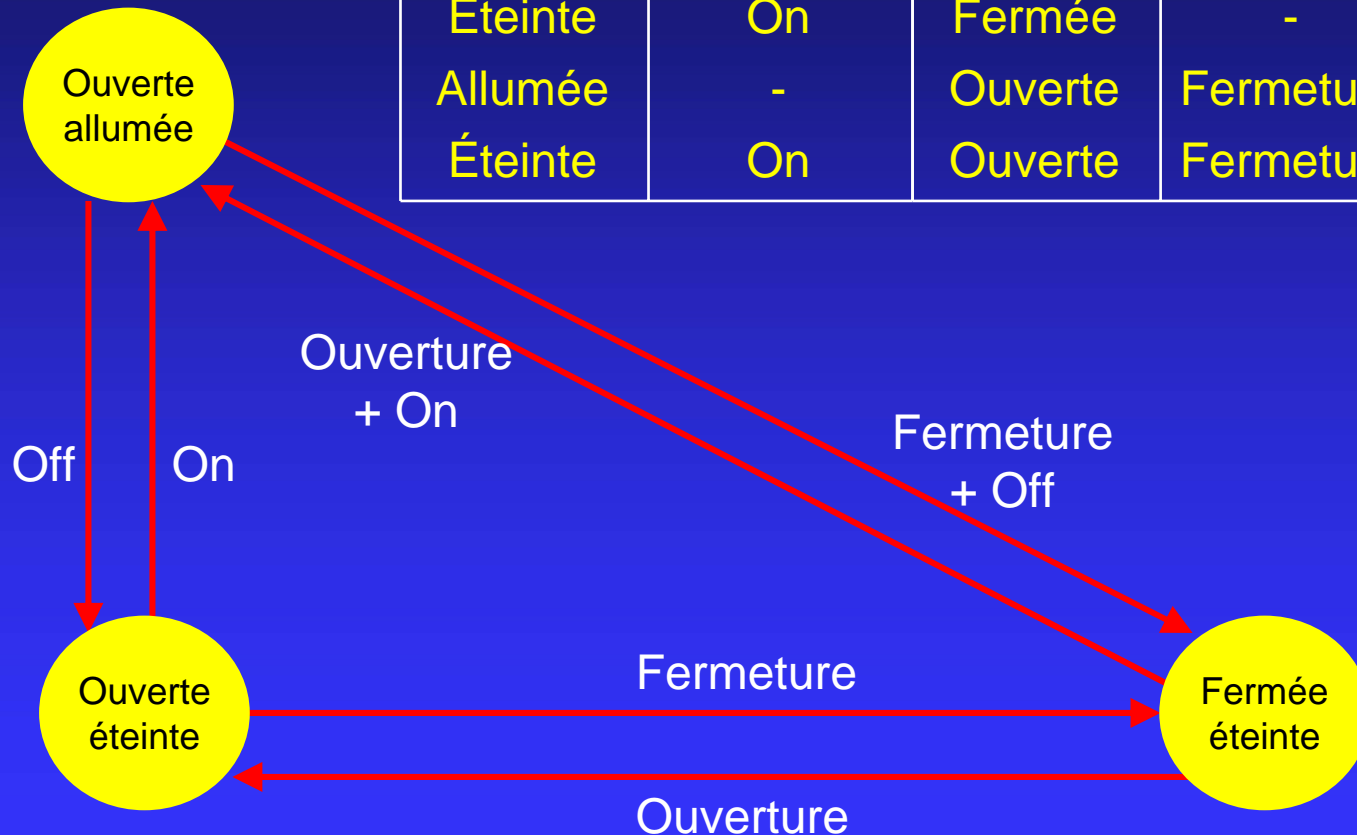
Exemple 2 : un réfrigérateur...



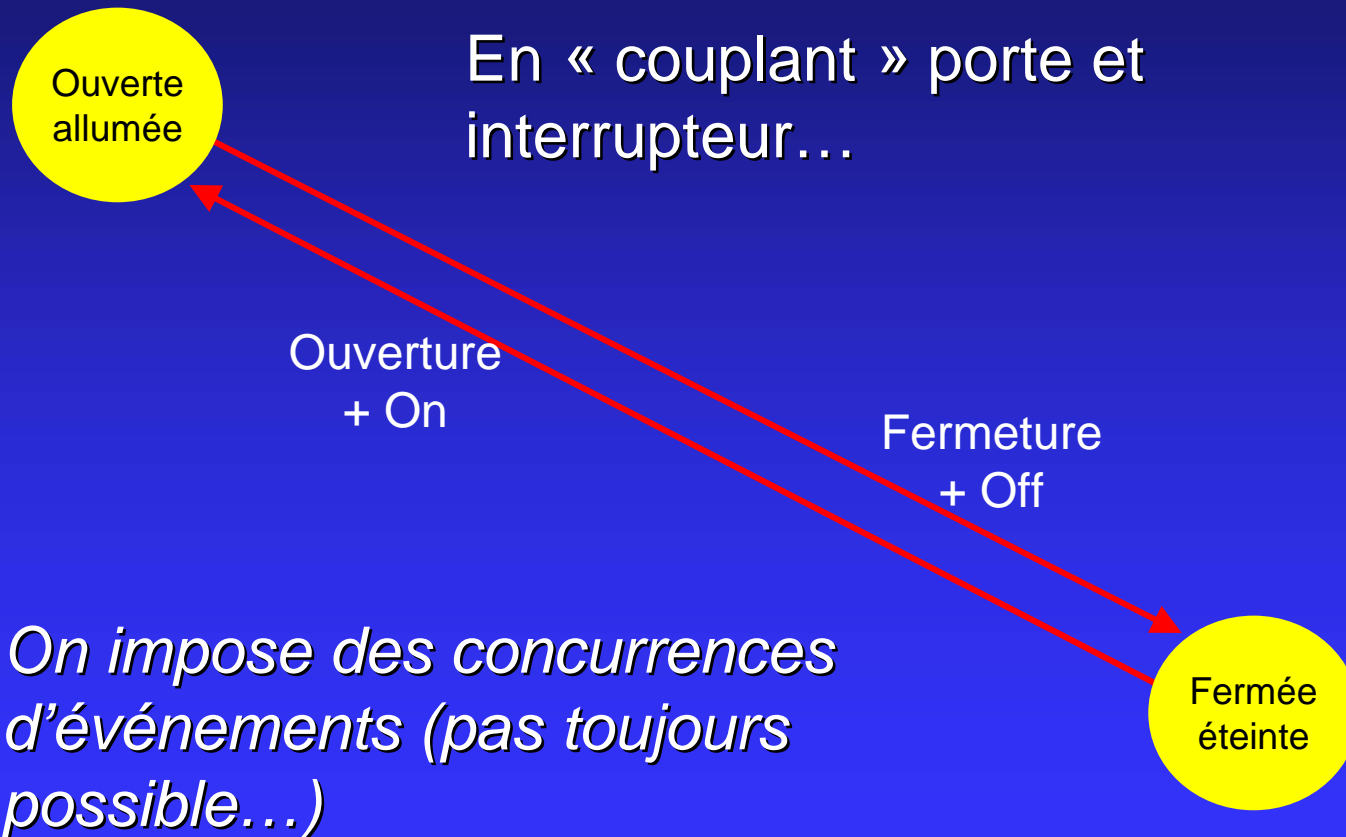
Produit d'automates avec contraintes

INTERDIT

Ampoule		Porte	
Éteinte	On	Fermée	-
Allumée	-	Ouverte	Fermeture
Éteinte	On	Ouverte	Fermeture



Produit d'automates avec contraintes



En pratique...

- Modéliser le système par un automate ou plusieurs automates « synchronisés ».
notion de sous-système...
explosion combinatoire, calculs « à la volée »...
- Vérifier certaines propriétés de l'automate.
états inaccessibles, états « vivaces », interblocages, etc. (problèmes de chemins)
- Rectifier en conséquence... et valider !

Quelques applications...

- Conception de systèmes (respect des spécifications),
- Outils d'aide à la vérification de systèmes (sûreté de fonctionnement),
- Outils de vérification de logiciels,
- etc.

*aéronautique, aérospatiale, transport
ferroviaire, nucléaire, réseaux
téléphoniques, réseaux informatiques,
électronique, ...*

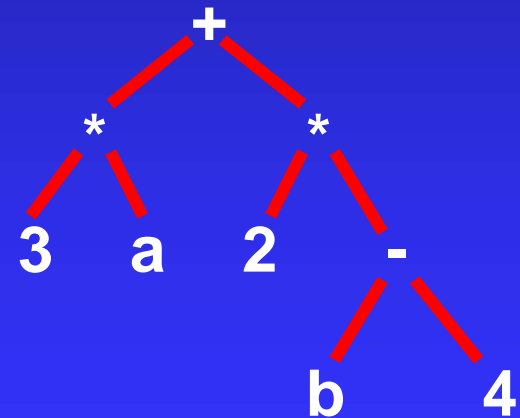
Techniques de compilation

Représentation d'un programme par un arbre

expression
arithmétique

$3 * a + 2 * (b - 4)$

codage par
un arbre



Techniques de compilation

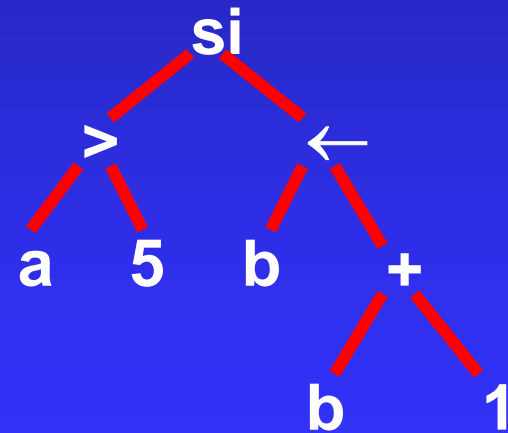
Représentation d'un programme par un arbre

instruction

si (a > 5)
alors b ← b + 1

Programme ⇒ **graphe**
(*sous-arbres communs*)

codage par
un arbre



Techniques de compilation

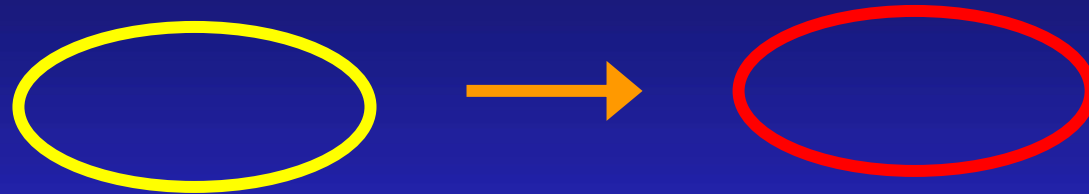
Principe général :

- Analyse du texte source (programme)
erreurs éventuelles
codage du source (arbre ou graphe)
- Traduction du codage en un autre langage
(langage machine, ...)

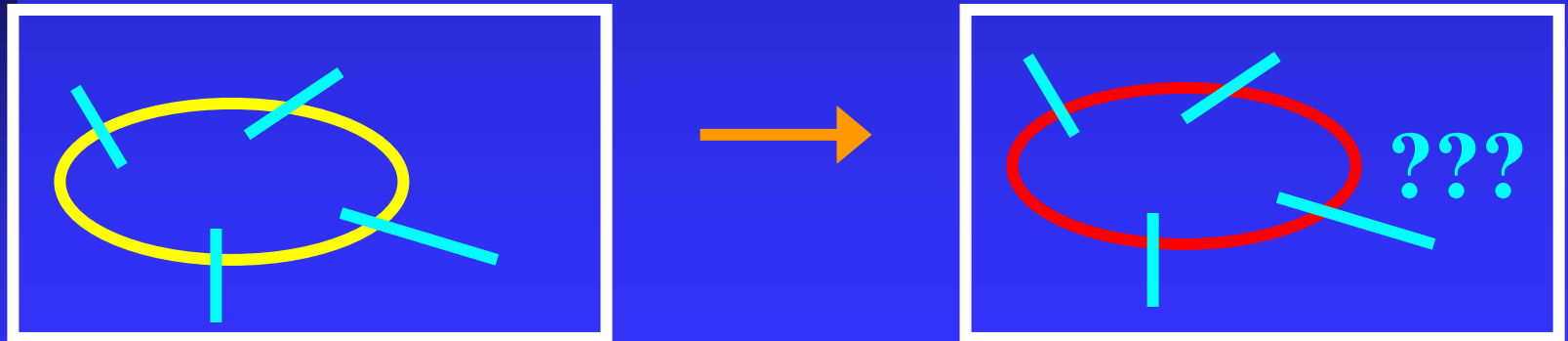
Langage interprété : exécution du codage par l'interpréteur...

Grammaires de graphes...

Règle de remplacement



Réécriture d'un graphe

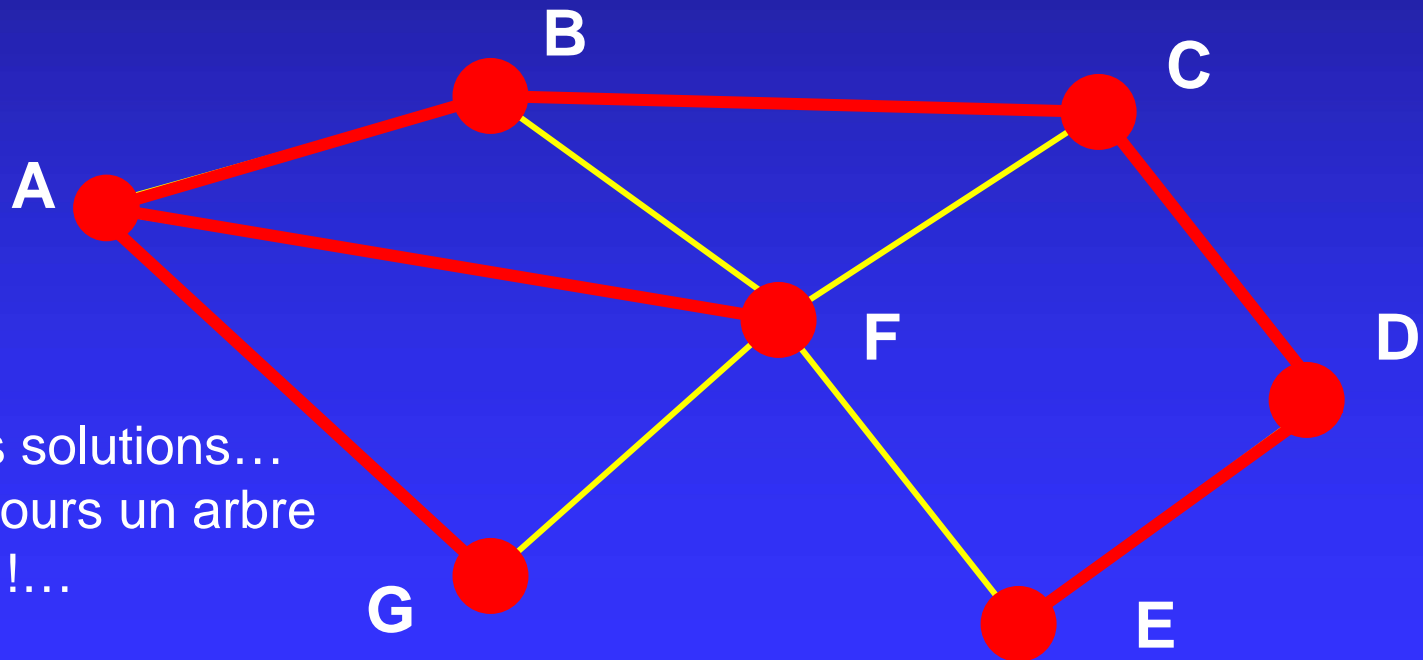


Construction d'un arbre couvrant

Règle de remplacement



Réécriture d'un graphe



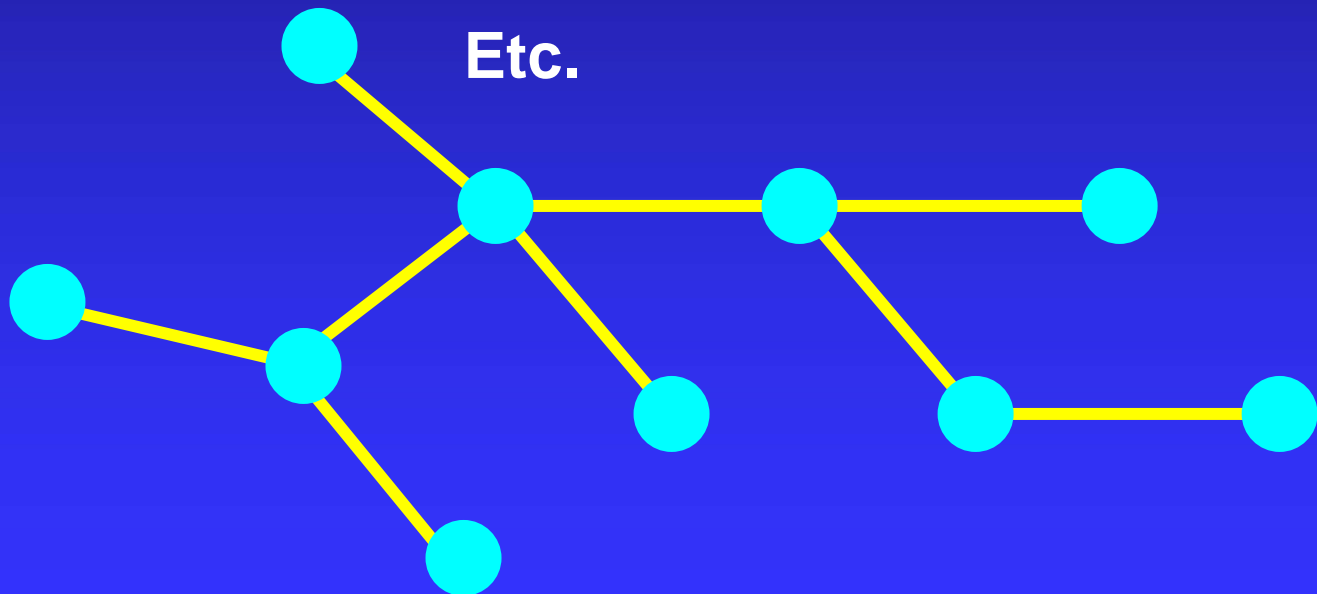
Plusieurs solutions...
mais toujours un arbre
couvrant !...

Construction d'arbres

Règle de remplacement



Réécriture d'un graphe



Le graphe de Kevin Bacon

- Sommets = acteurs
- Arêtes entre acteurs ayant joué dans un même film...

Propriété :
Tout acteur est à distance au plus 6 de Kevin Bacon !...



Le graphe de Kevin Bacon (2)

Site Web :

<http://www.fast-rewind.com/bacon.htm>

The Oracle of Bacon at Virginia

Louis de Funes has a Bacon number of 2.

Louis de Funes was in *Aventures de Rabbi Jacob*, Les (1973) with Janet Brandt

Janet Brandt was in *Queens Logic* (1991) with Kevin Bacon

Le graphe de Kevin Bacon (3)

Site Web :

<http://www.fast-rewind.com/bacon.htm>

The Oracle of Bacon at Virginia

Catherine Deneuve has a Bacon number of 2.

Catherine Deneuve was in *Anima persa* (1977) with Vittorio Gassman

Vittorio Gassman was in *Sleepers* (1996) with Kevin Bacon

Le graphe de Kevin Bacon (4)

Site Web :

<http://www.fast-rewind.com/bacon.htm>

The Oracle of Bacon at Virginia

Audrey Tautou has a Bacon number of 3.

Audrey Tautou was in Venus beaute (institut) (1999) with Bulle Ogier

Bulle Ogier was in Merci Docteur Rey (2002) with Eli Wallach

Eli Wallach was in Mystic River (2003) with Kevin Bacon